Theorie E
WS 03/04
Klausur Musterlösung

1)
a)
Bosonen:
Besetzungszahlen N_n

$|N_0, N_1, ...N_n\rangle = S_A \left(\underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes ...}_{N_0} \otimes \underbrace{|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes ...}_{N_1} \otimes ... \otimes \underbrace{|n\rangle \otimes |n\rangle \otimes ...}_{N_n} \right)$

$0 \leq N_i \leq N; \quad \sum\limits_{i=0}^{\infty} N_i = N$

$H_B |N_0, N_1, ...\rangle = \sum\limits_{i=0}^{\infty} N_i E_i |N_0, N_1, ...\rangle$

Fermionen:
b)
Grundzustand
Bosonen: $|N, 0, 0, 0, ...\rangle \qquad E_{\text{Grund.}} = N E_0$

Fermionen: $|1, 1, 1, ..., \underbrace{1}_{N-1}, 0, 0, 0, ...\rangle \qquad E_{\text{Grund}} = \sum\limits_{i=0}^{N-1} E_i$

2)
a)
$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle)$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad |a \uparrow\rangle, \quad |a \downarrow\rangle$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}|S\rangle = &\left(\cos\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle\right) \otimes \left(-\sin\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle + \cos\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle\right) \\
&- \left(-\sin\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle + \cos\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle\right) \otimes \left(\cos\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle\right) \\
= &-\cos\sin|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \cos^2|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - \sin^2|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \sin\cos|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\
&+ \sin\cos|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \sin^2|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - \cos^2|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - \cos\sin|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

$= |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$

b)
Messoperator: $\qquad \vec{a}\vec{S} \otimes \mathbf{1}$
Eigenraum zu Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$ wird aufgespannt von $|a \uparrow\rangle \otimes |a \uparrow\rangle \equiv |1\rangle$ und $|a \uparrow\rangle \otimes |a \downarrow\rangle \equiv |2\rangle$

Projektion: $\langle 1|S\rangle = 0, \quad \langle 2|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$P\left(A \to \frac{\hbar}{2}\right) = |\langle 1|S\rangle|^2 + |\langle 2|S\rangle|^2 = \frac{1}{2} = |\langle S|\,P\,|S\rangle|^2$

Nach der Messung:
$|S'\rangle = |2\rangle = \frac{P|S\rangle}{||P|S\rangle||}, \qquad P = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$

c)
$|S'\rangle = |a+\rangle \otimes |a-\rangle$
Messoperator: $P = \mathbf{1} \otimes \vec{b}\vec{s}$
Eigenraum $\frac{\hbar}{2}$ wird aufgespannt: $|a+\rangle \otimes |b+\rangle \equiv |3\rangle \qquad |a-\rangle \otimes |b+\rangle \equiv |4\rangle$

$$\langle 3|S'\rangle = \underbrace{\langle a+|a+\rangle}_{=1}\langle b+|a-\rangle, \quad |a-\rangle = -\sin\frac{\alpha}{2}|z+\rangle + \cos\frac{\alpha}{2}|z-\rangle \quad |b+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|z+\rangle + \sin\frac{\beta}{2}|z-\rangle$$

$$= -\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$\langle 4|S'\rangle = 0$

$P\left(B \to \frac{\hbar}{2}\right) = |\langle 3|S'\rangle|^2 + |\langle 4|S'\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$
$|S''\rangle = |a+\rangle \otimes |b+\rangle$

3)
a)
$\gamma_5 = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$
$P_L = \mathrm{diag}(0, 0, 1, 1) \qquad P_R = \mathrm{diag}(1, 1, 0, 0)$

b)
$P_L^2 = P_L \qquad P_R^2 = P_R \qquad P_L P_R = P_R P_L = 0$

c)
$P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$, da $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$
$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0 \to iP_L\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = 0 \to i\gamma^\mu\partial_\mu P_R\Psi = 0$

d)
$\delta\Psi = \omega_{mu\nu}\sum^{\mu\nu}\Psi, \quad \delta\Psi_L = \omega_{\mu\nu}\sum^{\mu\nu}\Psi_L \qquad \delta\Psi_L = P_L\delta\Psi?$
$P_L\delta\Psi = \omega_{\mu\nu}P_L\sum^{\mu\nu}\Psi = \omega_{\mu\nu}\sum^{\mu\nu}P_L\Psi = \delta\Psi_L \qquad P_L\sum^{\mu\nu} = \sum^{\mu\nu}P_L$
(Anmerk.: die Antisymmetrie von $\omega_{\mu\nu}$ lässt sich schön ausnutzen, der Rest kann mit γ-Matrixrechnung gezeigt werden)

e)
Lorentzalgebra wird von den $\sum^{\mu\nu}$ aufgespannt. Darstellung auf Diracspinoren ist reduzibel. Links- und Rechtshändige Spinoren werden bei Lorentztransformation nicht vermischt. Der Raum der Linkshändigen Spinoren ist also ein nichttrivialer invarianter Unterraum.

4)
a)
$U^{(S)}(t, t_0) = e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}}U^{(I)}(t, t_0)e^{\frac{iHt}{\hbar}}$

$U^{(S)}(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle_S = |\alpha(t)\rangle_S \quad U^{(I)}(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle_I = |\alpha(t)\rangle_I$

$|\alpha(0)\rangle_S = |\alpha(0)\rangle_I \quad |\alpha(t)\rangle_I = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}}|\alpha(t)\rangle_S$

$\Rightarrow U^{(I)}(t,t_0)e^{\frac{iH_0 t_0}{\hbar}}|\alpha(t_0)\rangle_S = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}}|\alpha(t)\rangle_S = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}}U^{(S)}(t,t_0)|\alpha(t_0)\rangle_S$

$P(0\to n) = |\langle n|\, U^{(S)}(t,t_0)\,|0\rangle|^2 = |\langle n|\, U^{(I)}(t,t_0)\,|0\rangle|^2$

$U^{(I)1}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_0 tdt'\, H_1^{(I)}(t')$

$\langle n|\, x\,|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\underbrace{\langle n|\, a + a^\dagger\,|0\rangle}_{\delta_{n,1}}$

$P(0\to n) = \delta_{n,1}\frac{2F^2}{\hbar m\omega^3}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$

b)

$U^{(I)2}(t) = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int\limits_0^t dt'\, H_1^{(I)}(t')\int\limits_0^t dt''\, H_1^{(I)}(t'')$

$\langle n|\, xe^{\frac{iH_0 t'}{\hbar}}e^{-\frac{iH_0 t''}{\hbar}}x\,|0\rangle = \langle n|\, a + a^\dagger e^{\frac{iH_0(t'-t'')}{\hbar}}\,|1\rangle \sim \langle n|\, a + a^\dagger\,|1\rangle = c\langle n|0\rangle + d\langle n|2\rangle$