



Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, Dr. Ch. Rupp

Theoretische Physik E im Wintersemester 2003/2004
Nachklausur

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Mittwoch, 21.04.2004, 14:00 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Bearbeitungszeit: $2\frac{1}{2}$ Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: 2 handbeschriebene A4-Seiten (1 Blatt); Wörterbuch

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
Korrektor				
Punkte				

Gesamtpunktzahl	
-----------------	--

Aufgabe N1: Zwei Elektronen im Kasten

Wir betrachten zwei Elektronen (identische Spin 1/2-Teilchen), die sich nur auf einer Linie der Länge L bewegen können (Die Elektronen befinden sich also effektiv in einem eindimensionalen Kasten mit unendlich hohen Wänden). Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigen wir.

- a) Bestimmen Sie zunächst die Energieeigenwerte sowie die zugehörigen Wellenfunktionen für ein einzelnes spinloses Teilchen in einem eindimensionalen Kasten der Länge L mit unendlich hohen Wänden. 1 Punkt
- b) Bestimmen Sie nun für das oben beschriebene System mit zwei Elektronen die Grundzustandsenergie sowie sämtliche zu dieser Energie gehörigen Energieeigenzustände. 2 Punkte
- c) Bestimmen Sie außerdem für das oben beschriebene System mit zwei Elektronen die erste angeregte Energie sowie sämtliche zu dieser Energie gehörigen Energieeigenzustände. 2 Punkte

Aufgabe N2: Spinaustauschoperator

Wir betrachten ein System von zwei Spin 1/2-Teilchen mit dem Zustandsraum

$$V = V^{(1/2)} \otimes V^{(1/2)}.$$

$V^{(1/2)}$ ist der zweidimensionale Zustandsraum eines Spin 1/2-Teilchens. \vec{S} sei der Spinoperator auf $V^{(1/2)}$. Weiter definieren wir $\vec{S}^{(1)} := \vec{S} \otimes \mathbf{1}$, $\vec{S}^{(2)} := \mathbf{1} \otimes \vec{S}$.

Zeigen Sie, daß der Operator

$$A := \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} \right)$$

die Spinwerte der beiden Teilchen vertauscht, daß also gilt:

$$A |m, n\rangle = |n, m\rangle, \quad \text{wobei } m, n = \pm \frac{1}{2}.$$

Hierbei bezeichnen die $|m, n\rangle$ gemeinsame Eigenzustände zu $S_3^{(1)}$ und $S_3^{(2)}$ mit den Eigenwerten $m\hbar$ bzw. $n\hbar$.

Die Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden:

- 1) Sie können unter Verwendung der Spinmatrizen in der S_3 -Eigenbasis,

$$S_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Methode 1:
2 Punkte

die Wirkung von A auf $|m, n\rangle$ für alle Kombinationen von m, n direkt ausrechnen.

- 2) Alternativ können Sie ohne direkte Verwendung der Paulimatrizen Singlett- und Triplett-Zustände betrachten. Denken Sie in diesem Fall an die erste binomische Formel. Methode 2:
4 Punkte

Sollten Sie beide Lösungswege versuchen, können Sie insgesamt maximal 4 Punkte erhalten.

Aufgabe N3: Relativistische Wellengleichungen

- a) Zeigen Sie, daß für Funktionen $\phi(x)$, die die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

erfüllen, der Viererstrom

$$j^\mu := \phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*$$

erhalten ist, d.h. $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt.

1 Punkt

- b) Zeigen Sie, daß jede Lösung $\psi(x)$ der Diracgleichung

$$(\mathbf{i}\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

auch die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)\psi(x) = 0$$

erfüllt.

1,5 Punkte

Hinweis: Multiplizieren Sie die Diracgleichung mit einem geeigneten Differentialoperator.

- c) Ein hypothetisches massives Photon (Masse m) würde man durch die sog. Proca-Gleichung beschreiben:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0,$$

wobei $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Zeigen Sie, daß jede Lösung $A^\mu(x)$ der Proca-Gleichung auch die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)A^\mu(x) = 0$$

erfüllt.

1,5 Punkte

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Divergenz der Proca-Gleichung.

- d) Unter Raumspiegelung geht ein Diracspinor $\psi(t, \vec{x})$ über in $\psi'(t, \vec{x}) = \gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$.
Zeigen Sie: Ist $\psi(t, \vec{x})$ eine Lösung der freien Diracgleichung, so genügt auch $\psi'(t, \vec{x})$ der freien Diracgleichung.

2 Punkte

Aufgabe N4: *Streuung am kugelsymmetrischen Potentialtopf*

- a) Wir betrachten die S-Wellenstreuung (Drehimpuls $l = 0$) an einem kugelsymmetrischen Potentialtopf mit

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 < 0 & (0 < r < R) \\ 0 & (r \geq R) \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die Streuphase δ .

Entwickeln Sie δ zur ersten Ordnung in der radialen Wellenzahl k .

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für $k = 0$ und entwickeln Sie diesen zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in der Potentialstärke V_0 .

3 Punkte

Hinweise:

Suchen Sie zunächst die physikalischen Lösungen der radialen Schrödingergleichung. Das asymptotische Verhalten dieser Lösungen ist $u(r) \sim \sin(kr + \delta)$, wobei δ die gesuchte Streuphase ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma(\Omega) = \left| \frac{e^{i\delta} \sin \delta}{k} \right|^2 .$$

Die Reihenentwicklung der tan- und arctan-Funktionen lautet:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots , \quad \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots .$$

- b) Berechnen Sie in nun erster Bornscher Näherung die Streuamplitude für das in Teilaufgabe a) angegebene Potential $V(r)$.

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Limes $k \rightarrow 0$.

2 Punkte

Hinweise:

Für rotationssymmetrische Potentiale ist die Streuamplitude in erster Bornscher Näherung gegeben durch

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2 k \sin(\theta/2)} \int_0^\infty dr r \sin(2kr \sin(\theta/2)) V(r) .$$

Das Integral können Sie durch partielle Integration lösen.

Die Reihenentwicklung der sin- und cos-Funktionen lautet:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots , \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots .$$