



Lösung zu Aufgabe N1

- a) Einteilchenwellenfunktionen im Kasten: $\psi(0) = \psi(L) = 0$, also

$$\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \geq 1.$$

Die Energieeigenwerte sind

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad (n \geq 1).$$

- b) Der nicht entartete Grundzustand ist

$$|\text{Grund}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, \uparrow; 1, \downarrow\rangle - |1, \downarrow; 1, \uparrow\rangle).$$

Die Energie ist

$$E_{\text{Grund}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}.$$

- c) Die erste angeregte Energie ist

$$E_{\text{angeregt}} = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}.$$

Hier liegt vierfache Entartung vor,

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, \uparrow; 2, \uparrow\rangle - |2, \uparrow; 1, \uparrow\rangle) & |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, \downarrow; 2, \downarrow\rangle - |2, \downarrow; 1, \downarrow\rangle) \\ |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, \uparrow; 2, \downarrow\rangle - |2, \downarrow; 1, \uparrow\rangle) & |4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, \downarrow; 2, \uparrow\rangle - |2, \uparrow; 1, \downarrow\rangle) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe N2

Variante 1:

$$\begin{aligned} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 (S_i \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes S_i) = \sum_{i=1}^3 S_i \otimes S_i \\ \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} (|m\rangle \otimes |n\rangle) &= \sum_{i=1}^3 (S_i |m\rangle) \otimes (S_i |n\rangle) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Paulimatrizen kann man die Wirkung von A auf die vier Zustände $|+-\rangle, |-+\rangle, |++\rangle, |--\rangle$ leicht ausrechnen.

Variante 2:

Gesamtdrehimpuls:

$$\left(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}\right)^2 = (\vec{S}^{(1)})^2 + (\vec{S}^{(2)})^2 + 2\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}.$$

Somit gilt

$$2\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} |j, m\rangle = \hbar^2 \left(j(j+1) - \frac{3}{2}\right),$$

wobei j der Gesamtdrehimpuls ist. Für Triplettzustände ist $j = 1$, also

$$A|1, m\rangle = |1, m\rangle.$$

Für den Singlettzustand ist $j = m = 0$, also

$$A|0, 0\rangle = -|0, 0\rangle.$$

Nun sind die Triplettzustände symmetrisch, also invariant unter Spinvertauschung, während der Singlettzustand unter Spinvertauschung das Vorzeichen ändert. Dies entspricht aber gerade der Wirkung von A .

Lösung zu Aufgabe N3

- a) klar
- b) Man wirke mit $(i\partial\!\!\!/ + m)$ auf die Diracgleichung.
- c) Aus der Viererdivergenz der Proca-Gleichung findet man $\partial_\nu A^\nu = 0$. Einsetzen dieser Relation in die Proca-Gleichung liefert die Klein-Gordon-Gleichung.
- d) Es ist zu beachten, daß γ^0 mit γ^k ($k = 1..3$) antivertauscht, mit γ^0 aber vertauscht.

Lösung zu Aufgabe N4

- a) Der Anschluss an der Stelle $r = R$ muss stetig und differenzierbar sein. Man findet:

$$\delta = -kR + \arctan\left\{\frac{k}{k'} \tan(k'R)\right\} = k \left(\frac{\tan k_0 R}{k_0} - R\right) + O(k^2).$$

Hierbei ist $k' := \sqrt{k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} V_0}$ und $k_0 := \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0}$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für $k = 0$ lautet

$$\sigma(\Omega)|_{k=0} = \left(\frac{\tan k_0 R}{k_0} - R\right)^2 = \frac{4 m^2 V_0^2 R^6}{9 \hbar^4} + O(V_0^3).$$

- b) Es ergibt sich:

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{m V_0}{4 \hbar^2 k^3 \sin^3(\theta/2)} (\sin(2kR \sin(\theta/2)) - 2kR \sin(\theta/2) \cos(2kR \sin(\theta/2))).$$

Im Limes $k \rightarrow 0$:

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{2 m V_0 R^3}{3 \hbar^2} + O(k).$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist einfach das Betragsquadrat davon,

$$\sigma(\Omega)|_{k=0} = \frac{4 m^2 V_0^2 R^6}{9 \hbar^4}.$$