Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
1. Klausur

Name: **Matrikelnummer:** **Übungsgruppe Nr.:**

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt und vermerken Sie Ihren Namen auf jedem abgegebenen Blatt.

Ergebnis:

Aufgabe	erreichte Punkte	mögliche Punkte
1		12
2		12
3		10
4		16
$\sum$		50

Formelsammlung auf Blattrückseite beachten!

Aus der Formelsammlung ...

- Die Wirkung eines Auf- oder Absteigeoperators $J_\pm$ auf ein System mit Drehimpuls-Quantenzahl j und Magnet-Quantenzahl m ist gegeben durch

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, \hbar\, |j, m \pm 1\rangle.$$

- Für ein System mit Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl j, die sich aus einer Bahndrehimpulskomponente l und einem Spin $s = 1/2$ zusammensetzt, gilt

$$\begin{aligned} |j = l \pm \frac{1}{2}, m\rangle \;&=\; \pm\sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}}\, |m_l = m - \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle \\ &\quad + \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}}\, |m_l = m + \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle\,. \end{aligned}$$

- Für einen Vektoroperator V_q gilt das Projektions-Theorem:

$$\langle \alpha', j, m'|V_q|\alpha, j, m\rangle = \frac{\langle \alpha', j, m|\vec{J} \cdot \vec{V}|\alpha, j, m\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\, \langle jm'|J_q|jm\rangle\,.$$

- Das Wigner-Eckart-Theorem besagt, daß

$$\langle \alpha', j', m'|T_q^{(k)}|\alpha, j, m\rangle = \langle jk; mq\, |jk; j'm'\rangle \frac{\langle \alpha', j'||T^{(k)}||\alpha, j\rangle}{\sqrt{2j+1}}\,.$$

- Die Übergangsamplitude $c_n(t)$ für den Übergang $|i\rangle \to |n\rangle$ in Anwesenheit eines Störpotentials $V(t)$ in 0., 1. und 2. Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} c_n^{(0)}(t) &= \delta_{ni}\,, \\ c_n^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, \langle n|V_I(t')|i\rangle \;=\; -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, e^{i\omega_{ni}t'}\, V_{ni}(t')\,, \\ c_n^{(2)}(t) &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, e^{i\omega_{nm}t'}\, V_{nm}(t')\, e^{i\omega_{mi}t''}\, V_{mi}(t'')\,, \end{aligned}$$

wobei $\omega_{ni} = (E_n - E_i)/\hbar$.

Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
1. Klausur

Aufgabe 1: *Drei-Zustands-System*

Ein Drei-Zustands-System werde durch den ungestörten Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und die zeitabhängige Störung

$$V(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} & 0 < t < \pi/\omega \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben.
Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System in seinem Grundzustand mit Energie-Eigenwert $E_1 = \hbar\omega$. Bestimmen Sie für $t > \pi/\omega$ in der niedrigsten nichtverschwindenden Ordnung der Störungstheorie

a) die Wahrscheinlichkeit, das System im Eigenzustand zu $E_3 = 4\hbar\omega$ zu finden,

b) die Wahrscheinlichkeit, das System im Eigenzustand zu $E_2 = 2\hbar\omega$ zu finden.

(6+6 Punkte)

Aufgabe 2: *Zusammengesetztes Spin-System*

Die Hyperfein-Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten eines Elektrons und eines Spin-3/2-Kerns wird durch den Hamilton-Operator

$$H = \frac{2A}{\hbar^2}\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

beschrieben. Dabei steht $\vec{S}_1$ für den Spin des Elektrons, $\vec{S}_2$ für den Spin des Kerns und $A > 0$.

a) Finden Sie die Eigenwerte von H und den Entartungsgrad eines jeden Eigenwerts.

b) Konstruieren Sie ausgehend vom Zustand $|s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{3}{2};\, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{3}{2}\rangle$ die beiden Eigenzustände von $\vec{S}_1^2$, $\vec{S}_2^2$, Gesamtspin $\vec{S}^2$ und S_z mit Eigenwert $s_z = +\hbar$.

(6+6 Punkte)

Aufgabe 3: *Atom in Magnetfeld*

Betrachten Sie ein wasserstoffartiges Atom mit den zwei Zuständen $|n, j' = l + \frac{1}{2}, m'\rangle$ und $|n, j = l - \frac{1}{2}, m\rangle$. Aufgrund der Spin-Bahn-Aufspaltung besteht zwischen den beiden Zuständen eine Energiedifferenz von $\hbar\omega_{LS} = E_{n,j'=l+\frac{1}{2}} - E_{n,j=l-\frac{1}{2}}$.

Zur Zeit $t \leq 0$ befinde sich das Atom im Zustand $|n, j = l - \frac{1}{2}, m\rangle$. Bei $t = 0$ werde ein schwaches, konstantes, homogenes Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ eingeschaltet. Das Potential V, welches die Wechselwirkung des Magnetfeldes mit dem magnetischen Moment des Atoms beschreibt, läßt sich dann schreiben als $V = (aL_z + bS_z)\,\Theta(t)$ mit $a = -eB/(2m_e)$ und $b = -eB/m_e$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Atom für eine beliebige Zeit $t > 0$ im Zustand $|n, j' = l + \frac{1}{2}, m'\rangle$ zu finden, in erster Ordnung der Störungstheorie.

(10 Punkte)

Aufgabe 4: *Sphärische Tensoren*

Produkte des Ortsoperators $\vec{r} = (x, y, z)$ können durch Kugelflächenfunktionen, $Y_l^m(\theta, \phi)$, ausgedrückt werden. Dabei gilt

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\,, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(\sin\theta)\,e^{\pm i\phi}\,,$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)\,, \quad Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,(\sin\theta\cos\theta)\,e^{\pm i\phi}\,, \quad Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\left(\sin^2\theta\right)e^{\pm 2i\phi}\,.$$

Die Y_l^m, $m = -l, \ldots, +l$ sind die Komponenten eines sphärischen Tensors von Rang l.

a) Drücken Sie die Operatoren $(x^2 - y^2)$ und $(3z^2 - r^2)$ durch sphärische Tensoren $T_q^{(k)}$ von Rang $k = 2$ aus.

b) Betrachten Sie nun das Matrixelement $\langle\alpha, j', m'|(3z^2 - r^2)|\alpha, j, m = j\rangle$. Für welche Werte von j' und m' ist dieses Matrixelement nichtverschwindend? Warum?

c) Der Erwartungswert $Q = e\,\langle\alpha, j, m = j|(3z^2 - r^2)|\alpha, j, m = j\rangle$ wird als Quadrupolmoment bezeichnet. Drücken Sie mithilfe des Wigner-Eckart-Theorems das Matrixelement $e\,\langle\alpha, j, m'|(x^2 - y^2)|\alpha, j, m = j\rangle$ mit $m' = j, j-1, \ldots, -j$ durch das Quadrupolmoment Q und Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus (ohne den expliziten Wert der jeweiligen Clebsch-Gordan-Koeffizienten einzusetzen).

(6+4+6 Punkte)