Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
2. Klausur

Name: **Matrikelnummer:** **Übungsgruppe Nr.:**

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt und vermerken Sie Ihren Namen auf jedem abgegebenen Blatt.

Ergebnis:

Aufgabe	erreichte Punkte	mögliche Punkte
1		18
2		12
3		20
$\sum$		50

Formelsammlung auf Blattrückseite beachten!

Aus der Formelsammlung ...

- *Legendre-Polynome:*

  Die Legendre-Polynome $P_l(x)$ sind gegeben durch

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l\,!} \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l \;, \quad \text{wobei} \quad (l \geq 0, l \in \mathbb{Z}\,) \,.$$

  Insbesondere ergibt sich daraus für $l = 0, 1, 2$:

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_1(x) = x\,, \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\,.$$

  Die $P_l(x)$ sind so normiert, daß

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x) P_{l'}(x) \;=\; \frac{1}{2l+1}\,\delta_{ll'}\,.$$

- *Dirac-Matrizen:*

  In der Dirac-Darstellung sind die γ-Matrizen $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ gegeben durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

  mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Die γ^μ erfüllen die Antikommutator-Beziehung

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

- *Dirac-Spinoren:*

  Die Dirac-Spinoren $w_r(\vec{p})$ für Spin-1/2-Teilchen mit Energie E, Masse m und Impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ sind gegeben durch

$$w_1(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{E+mc^2} \\ \frac{(p_x + ip_y)c}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \qquad w_2(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(p_x - ip_y)c}{E+mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E+mc^2} \end{pmatrix},$$

$$w_3(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{E+mc^2} \\ \frac{(p_x + ip_y)c}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_4(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{(p_x - ip_y)c}{E+mc^2} \\ \frac{-p_z c}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
2. Klausur

Aufgabe 1: *Streuung an sphärisch symmetrischem Potential*

Betrachten Sie die Streuung eines spinlosen Teilchens der Masse m und Energie E an einem sphärisch symmetrischen Potential der Form

$$V(r) = V_0\, e^{-\mu r}$$

in Bornscher Näherung.

a) Berechnen Sie die Streuamplitude $f^{(1)}(\theta)$ und den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für beliebige $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

Hinweis: $f^{(1)}(\theta)$ ist von der Form $\dfrac{A}{(B + C\cos\theta)^2}$.

b) Bestimmen Sie die Partialwellenamplitude $f_\ell^{(1)}(k)$ für $\ell = 0$. Benutzen Sie dazu

$$f^{(1)}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, f_l^{(1)}(k)\, P_l(\cos\theta)\ .$$

(10+8 Punkte)

Aufgabe 2: *Dirac-Gymnastik*

a) Betrachten Sie die Vierervektoren $a^\mu = (a_0, a_x, a_y, a_z)$ und $b^\mu = (b_0, b_x, b_y, b_z)$. Wie üblich gilt $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$. Die Dirac-Matrizen γ^μ und die Spinoren w_r sind in der beiliegenden Formelsammlung definiert. Berechnen Sie folgende Ausdrücke explizit:

$$\not{a}\, w_1(0)\,,$$

$$\{\not{a}, \not{b}\}\,,$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu\ .$$

b) Bestimmen Sie die Konstante k in

$$\bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\, \not{p}_2\, \not{p}_1\, u(\vec{p}_2, s_2) = k\, \bar{u}(\vec{p}_1, s_1)\, u(\vec{p}_2, s_2)\,,$$

wobei $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ und s_1, s_2 Impuls und Spin zweier Elektronen der Masse m seien.

(9+3 Punkte)

Aufgabe 3: *Helizitätseigenzustände eines Dirac-Teilchens*

Im allgemeinen Fall sind Impuls und Spin eines Teilchens beliebig orientiert. Es ist jedoch vorteilhaft, die Polarisationseigenschaften des Teilchens durch seine Helizität zu beschreiben. Betrachten Sie deshalb für ein Spin-1/2-Teilchen Eigenzustände des Helizitätsoperators, $S_p = \frac{\hbar}{2|\vec{p}|}\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$, mit

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das Quadrat von $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$. Bestimmen Sie daraus die Eigenwerte λ_i des Helizitätsoperators S_p.

b) Die beiden zweidimensionalen Eigenvektoren von $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ seien $\chi_{\pm}(\hat{\mathbf{p}})$. Das bedeutet, $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\,\chi_{\pm}(\hat{\mathbf{p}}) = \pm|\vec{p}|\chi_{\pm}(\hat{\mathbf{p}})$. Zeigen Sie, daß die 4-komponentigen Spinoren

$$u(\vec{p}=0,\pm) = \begin{pmatrix} \chi_{\pm}(\hat{\mathbf{p}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen der Dirac-Gleichung im Impulsraum, $(\gamma^\mu p_\mu - mc)\,u(\vec{p},\pm) = 0$, für ein ruhendes Teilchen, $\vec{p}=0$, sind.

c) Bestimmen Sie den Kommutator von $\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}$ mit der Matrix $S(\Omega)$,

$$S(\Omega) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{E+mc^2} & \frac{(p_x-ip_y)c}{E+mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{(p_x+ip_y)c}{E+mc^2} & \frac{-p_z c}{E+mc^2} \\ \frac{p_z c}{E+mc^2} & \frac{(p_x-ip_y)c}{E+mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{(p_x+ip_y)c}{E+mc^2} & \frac{-p_z c}{E+mc^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$S(\Omega)$ beschreibt einen Boost des Teilchens aus dem Ruhesystem in das Laborsystem, in dem sich das Teilchen mit dem Viererimpuls $p^\mu = \left(\sqrt{(mc)^2+\vec{p}^2},\ \vec{p}\right) = (E/c,\ \vec{p})$, bewegt.

Ist der geboostete Spinor, $u(\vec{p},\pm) = S(\Omega)\ u(0,\pm)$, auch ein Helizitäts-Eigenzustand?

d) Drücken Sie $u(\vec{p},\pm)$ durch die zwei-komponentigen Spinoren $\chi_{\pm}(\vec{p})$ aus (dabei braucht $\chi_{\pm}(\vec{p})$ selbst nicht berechnet zu werden).

(5+4+6+5 Punkte)

Viel Erfolg!