Aufgabe 1: *Spin*

Sie dürfen sämtliche Teilaufgaben dieser Aufgabe ohne Rechnung beantworten.

a) Ein Spin-1/2-Teilchen befinde sich in einem Eigenzustand des Spinoperators in z-Richtung zum Eigenwert $+\hbar/2$. Wir führen zuerst eine Messung des Spins in x-Richtung durch und messen unmittelbar danach wieder den Spin in z-Richtung. Welche Paarungen von Messergebnissen sind möglich und mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man diese? In welchem Zustand befindet sich das System nach der letzten Messung, abhängig von den Messresultaten?
(1 Punkt)

b) $R_y(\phi)$ sei der Operator für Drehungen um einen Winkel ϕ um die y-Achse, wirkend im zweidimensionalen Zustandsraum eines Spin-1/2-Teilchens. Wie wirken $R(0)$, $R(\pi)$, $R(2\pi)$ auf einen Eigenzustand $|+\rangle$ des Spins in z-Richtung zum Eigenwert $+\hbar/2$ (d.h. $S_z\,|+\rangle = (\hbar/2)\,|+\rangle$?
Hinweis: In einem der drei Fälle genügt es, die Lösung bis auf einen Phasenfaktor anzugeben.
(1 Punkt)

c) Wie zerlegt sich der Zustandsraum für drei unterscheidbare Spin-1/2-Teilchen in irreduzible Unterräume bezüglich der Drehimpulsalgebra? (Hinweis: schrittweise vorgehen!)
(2 Punkte)

Aufgabe 2: *Drehimpuls*

Mit $V^{1/2}$ bezeichnen wir einen zweidimensionalen Raum, in dem der Drehimpuls gemäß der Spin-1/2-Darstellung wirkt. Wir betrachten das n-fache Tensorprodukt solcher Räume,

$$V := \underbrace{V^{1/2} \bigotimes \cdots \bigotimes V^{1/2}}_{n \text{ Faktoren}} .$$

Ist $\pi \in S_n$ eine Permutation der Zahlen $1 \dots n$ (S_n ist die Menge solcher Permutationen), so bezeichnen wir mit P_π den zugehörigen Vertauschungsoperator auf V. Es gilt $P_\pi P_{\pi'} = P_{\pi\pi'}$. Weiterhin ist der Symmetrisierungsoperator S definiert durch

$$S := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} P_\pi$$

a) Zeigen Sie, daß S ein Projektor ist, daß also $S^2 = S$ gilt.
(2 Punkte)

b) V_S sei der Unterraum von V, der nur vollständig symmetrische Zustände enthält, also gerade die Eigenvektoren von S zum Eigenwert 1. Die Anwendung des Gesamtdrehimpulsoperators $\vec{J}$ führt nicht aus V_S heraus. Zeigen Sie, daß die Wirkung des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}$ auf V_S einer irreduziblen Darstellung der Drehimpulsalgebra entspricht.
Hinweis: Überlegen Sie zuerst, welchen Eigenwert $\vec{J}^2$ hat und verwenden Sie dann ein Dimensionsargument.
(3 Punkte)

Aufgabe 3: *Dirac-Gleichung*

Die Dirac-Gleichung für ein freies Elektron lautet

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

a) Zeigen Sie, daß man die Matritzen $\gamma^0\gamma^k$ ($k = 1..3$) als Geschwindigkeitsoperator interpretieren kann in dem Sinne, daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < x^k >=< \gamma^0\gamma^k > .$$

Hinweis: Der (zeitabhängige) Erwartungswert eines Operators O ist definiert als

$$< O >= \int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger(t,\vec{x}) O \psi(t,\vec{x}).$$

(2 Punkte)

b) Die Lorentztransformation eines Dirac-Spinors ist gegeben durch

$$\psi'(x') = \Lambda\psi(x),$$

wobei die Matrix Λ die Relation

$$\Omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda,$$

erfüllen muß. $\Omega^\mu{}_\nu$ ist die Transformationsmatrix des 4-Vektors x,

$$x'^\mu = \Omega^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Zeigen Sie, daß die Diracgleichung forminvariant unter Lorentztransformationen ist.
(1 Punkt)

c) Zeigen Sie, daß man für eine infinitesimale Lorentztransformation

$$\Omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + O(\omega^2)$$

mit $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ die Matrix Λ so wählen kann:

$$\Lambda = \mathbf{1} + \frac{1}{8}\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

(2 Punkte)

d) Berechnen Sie das Verhalten der Stromdichte $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ unter Lorentztransformationen.
Hinweis: Der adjungierte Spinor $\bar{\psi}$ ist definiert als $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$. Sie können verwenden, daß Λ die Relation $\gamma^0\Lambda^\dagger\gamma^0 = \Lambda^{-1}$ erfüllt.
(1 Punkt)

Aufgabe 4: *Partialwellenstreuung*

Berechnen Sie den Tangens der Streuphase zum Drehimpuls null (S-Welle) für das folgende rotationssymmetrische Potential:

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\gamma\delta(r - R), \qquad \gamma > 0.$$

Hinweis: Suchen Sie zunächst die physikalischen Lösungen der radialen Schrödingergleichng. Das asymptotische Verhalten dieser Lösungen ist $u(r) \sim \sin(kr + \delta)$, wobei δ die gesuchte Streuphase ist.
Die trigonometrischen Additionstheoreme lassen sich leicht aus der Relation $e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\beta}$ gewinnen.
(5 Punkte)