Universität Karlsruhe (TH) **WS 2006/07**

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Klausur Nr. 1

Name/Matrikelnummer/Übungsgruppe:	1	2	3	Σ

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator **[$3+3+4=10$]**

Ein einfacher harmonischer Oszillator mit der Frequenz ω befinde sich in einem Zustand

$$|\,\psi\,\rangle = N\big(1 + a + aa^\dagger a\big)\,|\,1\,\rangle \ .$$

Darin ist $|\,n\,\rangle = |\,1\,\rangle$ ein Energieeigenzustand, N eine Normierungskonstante und

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$$

ist der Vernichtungsoperator. Es gilt $[a, a^\dagger] = 1$.

(a) Schreiben Sie $|\,\psi\,\rangle$ als normierte Linearkombination von Energieeigenzuständen und bestimmen Sie den Normierungsfaktor N.

(b) Im Schrödingerbild sei $|\,\psi(t=0)\,\rangle_S = |\,\psi\,\rangle$. Bestimmen Sie $|\,\psi(t)\,\rangle_S$ für beliebige Zeiten.

(c) Wie lautet der Ortserwartungswert $\langle\,x\,\rangle\,(t)$ für das System im Zustand $|\,\psi(t)\,\rangle_S$?

Aufgabe 2: Hyperfeinwechselwirkung **[$3\cdot 4=12$]**

Die Hyperfeinwechselwirkung zwischen einem Kern mit $S_1 = 2$ und einem Elektron werde durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{2\alpha}{\hbar^2}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Energieeigenwerte und deren Entartung.

(b) Berechnen Sie alle Zustände mit $S_z = +\frac{3}{2}\hbar$ in der $|\,S_1, S_2; M_1, M_2\,\rangle \equiv |\,S_1 M_1\,\rangle|\,S_2 M_2\,\rangle$–Basis.

(c) Das System befinde sich im normierten $S_z = \frac{3}{2}\hbar$ Zustand

$$|\,\phi\,\rangle = \cos\alpha\,|\,2\,1\,\rangle\,|\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\rangle + \sin\alpha\,|\,2\,2\,\rangle\,|\,\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\,\rangle$$

und Sie messen die Energie. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten messen Sie jeweils die in Teil (a) bestimmten Energieeigenwerte?

Aufgabe 3: Sphärische Tensoroperatoren **[$3+2+3=8$]**

Wir betrachten das Matrixelement eines sphärischen Tensoroperators $T_m^{(j)}$

$$A = \langle\, \alpha\, j_1\, m_1 \,|\, T_m^{(j)} \,|\, \beta\, j_2\, m_2 \,\rangle = \langle\, \alpha\, 2\ {-2} \,|\, T_m^{(j)} \,|\, \beta\, 3\, 0 \,\rangle$$

(a) Welche Werte j, m sind für $T_m^{(j)}$ erlaubt, damit A nicht verschwindet?

(b) Drücken Sie das Matrixelement

$$B = \langle\, \alpha\, 2\, 0 \,|\, T_{-2}^{(2)} \,|\, \beta\, 3\, 2 \,\rangle$$

durch $M = \langle\, \alpha\, 2\ {-1} \,|\, T_{-2}^{(2)} \,|\, \beta\, 3\, 1 \,\rangle$ und geeignete Clebsch–Gordan–Koeffizienten aus (die CGKs sollen hier nicht explizit berechnet werden!).

(c) Könnten Sie nun (ggf. mit Kenntnis von B aus Teil (b)) auch die folgenden Matrixelemente berechnen? Bitte begründen Sie kurz warum bzw. warum nicht.

$$C = \langle\, \alpha\, 2\, 1 \,|\, T_{-2}^{(2)} \,|\, \beta\, 3\, 3 \,\rangle\,, \qquad D = \langle\, \alpha\, 2\, 1 \,|\, T_{1}^{(2)} \,|\, \beta\, 3\, 0 \,\rangle\,, \qquad E = \langle\, \alpha\, 2\, 1 \,|\, T_{0}^{(3)} \,|\, \beta\, 3\, 0 \,\rangle\,,$$

$$F = \langle\, \alpha\, 2\ {-1} \,|\, T_{-2}^{(3)} \,|\, \beta\, 3\, 1 \,\rangle\,, \qquad G = \langle\, \alpha\, 1\ {-1} \,|\, T_{-2}^{(2)} \,|\, \beta\, 4\, 1 \,\rangle\,.$$

Nützliche Formeln

Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a\,|\, n \,\rangle = \sqrt{n}\,|\, n-1 \,\rangle\ , \qquad a^\dagger\,|\, n \,\rangle = \sqrt{n+1}\,|\, n+1 \,\rangle\ .$$

Leiteroperatoren auf Drehimpulseigenzustände:

$$J_\pm\,|\, j\, m \,\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|\, j\, m\pm 1 \,\rangle\ .$$

Wigner–Eckart–Theorem:

$$\langle\, \alpha\, j' m' \,|\, T_q^{(k)} \,|\, \beta\, j m \,\rangle = \langle\, jk; mq \,|\, j' m' \,\rangle\, \frac{\langle\, \alpha\, j' \,||\, T^{(k)} \,||\, \beta\, j \,\rangle}{\sqrt{2j+1}}\ .$$