

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Lösungen zur Klausur Nr. 1

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator

[3 + 3 + 4 = 10]

(a) $|\psi\rangle = N(1 + a + aa^\dagger a)|1\rangle = N(1 + a + (a^\dagger a + 1)a)|1\rangle$, wegen $[a, a^\dagger] = 1$. Da $aa|1\rangle = a|0\rangle = 0$ gilt $|\psi\rangle = N(1 + 2a)|1\rangle = N(2|0\rangle + |1\rangle)$. Der Normierungsfaktor ergibt sich aus $|\psi|^2 = N^2(4 + 1)$, also $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|0\rangle + |1\rangle)$.

(b) Für die Zeitevolution von Energieeigenzuständen des harmonischen Oszillators gilt mit $H|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle$ im Schrödingerbild $|n, t\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|n\rangle = |n\rangle e^{-i\omega t(n+1/2)}$. Damit erhalten wir sofort die Zeitevolution von $|\psi\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-3i\omega t/2}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\omega t/2}(2|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle)$$

(c) Im Schrödingerbild berechnen wir direkt, da $(\alpha|\psi\rangle)^\dagger = \alpha^* \langle\psi|$

$$\begin{aligned} \langle x \rangle(t) &= \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle \\ &= \frac{1}{5} e^{i\omega t/2} e^{-i\omega t/2} (2\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|) \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \right] (2|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle) \end{aligned}$$

Aus dem Vernichtungsoperator $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right)$ nach Aufgabenstellung erhalten wir einfach $a^\dagger$ durch $i \rightarrow -i$, weil x und p hermitesch. Addition ergibt dann bis auf einen Faktor den x -Operator in der Leiteroperatordarstellung, mit dem wir auf Energieeigenzuständen operieren können. Wie, das finden wir in den 'nützlichen Formeln' auf dem Aufgabenblatt. Damit ist

$$(a + a^\dagger)(2|0\rangle + e^{-i\omega t}|1\rangle) = 0 + e^{-i\omega t}\sqrt{1}|0\rangle + 2\sqrt{1}|1\rangle + e^{-i\omega t}\sqrt{2}|2\rangle.$$

Mit $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ ergibt sich dann sofort

$$\langle x \rangle(t) = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (2e^{-i\omega t} + 2e^{i\omega t}) = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos \omega t.$$

Aufgabe 2: Hyperfeinwechselwirkung

[3 · 4 = 12]

(a) Ein Satz vertauschender Observabler ist $\vec{S}^2, \vec{S}_z, \vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2$. Wir schreiben also mit $2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2$ den Hamiltonoperator als

$$H = \frac{\alpha}{\hbar^2} (\vec{S}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2).$$

Da H mit dem angegebenen Satz von Drehimpulsoperatoren vertauscht, erhalten wir also die folgenden Energieeigenwerte, wenn H auf Drehimpulseigenzustände angewandt wird,

$$E = \frac{\alpha}{\hbar^2} \left(\hbar^2 S(S+1) - \hbar^2 2(2+1) - \hbar^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) = \alpha \left(S(S+1) - \frac{27}{4} \right),$$

wobei wir schon $S_1 = 2, S_2 = 1/2$ eingesetzt haben. Da die Drehimpulskopplung $2 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{5}{2}$ bekommen wir die beiden möglichen Energieeigenwerte. Die Energieeigenzustände sind jeweils $|S, M_S\rangle$ -Eigenzustände und daher $2S + 1$ -fach entartet. Wir bekommen also

$$E_1 = -3\alpha \quad (S = \frac{3}{2}, 4\text{-fach entartet}), \quad E_2 = 2\alpha \quad (S = \frac{5}{2}, 6\text{-fach entartet}).$$

(b) Die Zustände mit $S_z = +\frac{3}{2}\hbar$ bekommen wir mit der Hilfe von Leiteroperatoren (s. 'nützliche Formeln' auf dem Aufgabenblatt). Beginnend mit dem eindeutigen Zustand höchsten Gewichts bekommen wir $|\frac{5}{2} \frac{5}{2}\rangle = |2 2\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$. Also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} J_- |\frac{5}{2} \frac{5}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{5}{2} \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \frac{3}{2}} |\frac{5}{2} \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{5} |\frac{5}{2} \frac{3}{2}\rangle \\ &= \frac{1}{\hbar} J_- |2 2\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 2} |2 1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})} |2 2\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \\ &= 2 |2 1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + |2 2\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned}$$

Damit bekommen wir den ersten $S_z = +\frac{3}{2}\hbar$ -Zustand in der gesuchten Basis

$$|\frac{5}{2} \frac{3}{2}\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} |2 1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |2 2\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$$

Per Orthogonalität bekommen wir daraus den nächsten (und einzigen weiteren) Zustand mit $S_z = +\frac{3}{2}\hbar$,

$$|\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{5}} |2 1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}} |2 2\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \right)$$

Wir bestimmen per Condon-Shortley-Konvention noch den richtigen Phasenfaktor,

$$\langle j_1 j_2; m_1 = j_1, m_2 = m - j_1 | j m = j \rangle = \langle 2 \frac{1}{2}; 2 -\frac{1}{2} | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle \geq 0, \text{ reell}$$

und erhalten also ($\sigma = -1$)

$$|\frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}} |2 1\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |2 2\rangle |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle.$$

Anmerkung: Die Bestimmung der Condon-Shortley Phase wurde nicht in der Aufgabe verlangt. Man hätte ohnehin noch die Wahl $j_1 \leftrightarrow j_2$ zu vertauschen, dann wäre auch das Vorzeichen anders ausgefallen. Für die Antwort in Teil (c) macht das keinen Unterschied.

(c) Das System ist im Zustand mit $S_z = \frac{3}{2}\hbar$, kann sich also in einem Zustand mit Gesamtspin $S = 3/2$ oder $S = 5/2$ befinden. Da die Energieeigenzustände gleichzeitig Eigenzustände des Gesamtspins sind, müssen wir also den Überlapp von $|\phi\rangle$ mit den Spineigenzuständen aus Teil (b) berechnen.

$$|\phi\rangle = |E_1\rangle \langle E_1 | \phi \rangle + |E_2\rangle \langle E_2 | \phi \rangle = |E_1\rangle c_1 + |E_2\rangle c_2$$

In Teil (b) haben wir die gesuchten Spineigenzustände bereits nach $|2 M_1\rangle |\frac{1}{2} M_2\rangle$ -Zuständen entwickelt. Daher können wir c_1 und c_2 sofort bestimmen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} | \phi \rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2 1 | \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | + \frac{2}{\sqrt{5}} \langle 2 2 | \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \right) | \phi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos \alpha + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin \alpha, \\ c_2 &= \langle \frac{5}{2} \frac{3}{2} | \phi \rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \langle 2 1 | \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | + \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 2 2 | \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | \right) | \phi \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Damit bestimmen wir schließlich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, das System in den Energieeigenzuständen $|E_1\rangle$ bzw. $|E_2\rangle$ zu finden,

$$\begin{aligned} P(E_1) &= |c_1|^2 = \frac{1}{5} \left(\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha \right), \\ P(E_2) &= |c_2|^2 = \frac{1}{5} \left(4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Zur Kontrolle bilden wir die Summe und finden $P(E_1) + P(E_2) = 1$.

Aufgabe 3: Sphärische Tensoroperatoren**[3 + 2 + 3 = 8]**

(a) Der sphärische Tensoroperator $T_m^{(j)}$ trägt Drehimpuls. Es müssen also die Auswahlregeln der $j \otimes j_2$ -Kopplung berücksichtigt werden. Da die zwei Drehimpulse zu $j_1 = 2$ koppeln, $j \otimes 3 = 2$, muss $2 = |j - 3|, \dots, j + 3$ mit sinnvollen $j > 0$ erfüllt werden. Damit ist $5 \geq j \geq 1$. Aus der m -Auswahlregel bekommen wir $m_2 + m = m_1$, also $0 + m = -2$, d.h. $m = -2$. Damit ist auch $j = 1$ ausgeschlossen. Wir erhalten also

$$A \neq 0 \quad \text{für} \quad j = 2, 3, 4, 5, \quad m = -2.$$

(b) Da wir es bei M und B mit Matrixelementen (ME) von Tensoroperatoren gleichen Ranges zu tun haben, die zwischen den jeweils gleichen j_1, j_2 ausgewertet werden, bekommen wir im Wigner-Eckart-Theorem jeweils das gleiche reduzierte Matrixelement. Wir schreiben für beide Operatoren das Wigner-Eckart-Theorem hin,

$$M = \langle 32; 1 -2 | 2 -2 \rangle \frac{\langle \alpha 2 || T^{(2)} || \beta 3 \rangle}{\sqrt{2 \cdot 3 + 1}}, \quad B = \langle 32; 2 -2 | 2 0 \rangle \frac{\langle \alpha 2 || T^{(2)} || \beta 3 \rangle}{\sqrt{2 \cdot 3 + 1}}.$$

Damit erhalten wir sofort den gesuchten Ausdruck für B ,

$$B = \frac{\langle 32; 2 -2 | 2 0 \rangle}{\langle 32; 1 -2 | 2 -2 \rangle} M.$$

(c) Die Matrixelemente C bis G können aus folgenden Gründen (nicht) berechnet werden:

- Bei C haben wir den gleichen Tensoroperator (TO), also ja, Berechnung wie oben.
- In D haben wir einen TO des gleichen Multipletts. Da im Wigner-Eckart-Theorem jedoch nur das reduzierte ME vorkommt, ja.
- In E haben wir zwar einen TO anderen Ranges, jedoch ist $m + q \neq m'$, also ist das Matrixelement = 0, also ja.
- F kann nicht berechnet werden, wegen des falschen Ranges des TO.
- $G = 0$, also ja; man kann nicht $4 \otimes 2$ zu 1 koppeln.