Universität Karlsruhe (TH) **WS 2006/07**

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Klausur Nr. 2

Name/Matrikelnummer/Übungsgruppe:	1	2	3	Σ

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Störungsrechnung **[5 + 5 + 5 = 15]**

Der Hamilton–Operator eines 3–Zustands–Systems ist durch $H = H_0 + V$ gegeben, wobei

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \,, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Darin ist V als Störung aufzufassen, d.h. $\alpha, \beta \ll \hbar\omega$. Hier sind beide Operatoren in der Basis der ungestörten Energieeigenzustände $|\,1\,\rangle^{(0)}, |\,2\,\rangle^{(0)}, |\,3\,\rangle^{(0)}$ zu den Eigenwerten $E_1 = 2\hbar\omega$, $E_2 = 5\hbar\omega$, $E_3 = 6\hbar\omega$ geschrieben.

(a) Berechnen Sie den Grundzustand in 1. Ordnung und die Grundzustandsenergie in 2. Ordnung zeitunabhängiger Störungsrechnung.

(b) Die Störung V sei jetzt nur für $0 < t < t_1$ eingeschaltet. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\,2\,\rangle^{(0)}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zu einem Zeitpunkt $t_{\mathrm{obs}} > t_1$ im Zustand $|\,1\,\rangle^{(0)}$ vorzufinden in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie.

(c) Sei nun wieder $V(t) = \mathrm{const} = V$. Das ungestörte System habe jedoch einen entarteten Grundzustand: wir setzen $\langle\,2\,|\,H_0\,|\,2\,\rangle = 2\hbar\omega$. Wie lauten unter Berücksichtigung von V bis zur ersten Ordnung der entarteten Störungsrechnung die Energien und Energieeigenzustände?

Aufgabe 2: Helizität eines freien Dirac–Teilchens **[5]**

Die Ebenen Wellen–Lösungen für ein Dirac–Teilchen mit Masse m und Impuls $\vec{p}$ sind durch

$$w_1(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}$$

$$w_2(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \\ \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}$$

mit $N = \sqrt{(E+mc^2)/2mc^2}$ gegeben. Für ein freies Dirac–Teilchen ist die Helizität $\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$ erhalten ($\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$). Konstruieren Sie Linearkombinationen von $w_1(\vec{p})$ und $w_2(\vec{p})$, die Eigenzustände des Helizitätsoperators zu den Eigenwerten ± 1 sind.

Aufgabe 3: Identische Teilchen **[4 + 4 + 2 = 10]**

Ein Atom mit drei Elektronen werde durch einen Hamiltonoperator

$$H = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}_i) \right]$$

beschrieben. Der Einteilchenhamiltonoperator hat nicht entartete Energieeigenwerte $E_1 < E_2 < E_3 \ldots$ zu Eigenzuständen $\psi_1(\vec{r}), \psi_2(\vec{r}), \ldots$. Wir verwenden die Abkürzung

$$\psi_{451}\,|\,+-+\,\rangle \equiv \psi_4(\vec{r}_1)\,|\,+\,\rangle \otimes \psi_5(\vec{r}_2)\,|\,-\,\rangle \otimes \psi_1(\vec{r}_3)\,|\,+\,\rangle$$

für einen Zustand mit Elektron 1 im Einteilchenzustand $\psi_4(\vec{r}_1)$ mit $s_z = +\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_4$, Elektron 2 in Zustand $\psi_5(\vec{r}_2)$ mit $s_z = -\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_5$ sowie Elektron 3 in Zustand $\psi_1(\vec{r}_3)$ mit $s_z = +\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_1$.

(a) Konstruieren Sie den Zustand $|\,\Psi\,\rangle$ der geringstmöglichen Energie, wenn der Gesamtspin $S = \frac{3}{2}, S_z = +\frac{3}{2}$ sein soll.

(b) Konstruieren Sie den Grundzustand $|\,G\,\rangle$ des Atoms mit $S_z = +\frac{1}{2}$. Welche Energie hat der Grundzustand?

(c) Welchen Gesamtspin S hat der Zustand $|\,G\,\rangle$? Warum?

Nützliche Formeln

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}, \qquad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\,.$$