

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Lösungen zur Klausur Nr. 2

Aufgabe 1: Störungsrechnung

[5 + 5 + 5 = 15]

(a) Energiekorrekturen zum Grundzustand: bis zur ersten Ordnung gibt es keinen Beitrag:

$$E_1^{(1)} = \langle 1 | V | 1 \rangle = 0.$$

In zeitunabhängiger Störungsrechnung ohne Entartung haben wir

$$\Delta_1^{(2)} = \sum_{k \neq 1} \frac{|\langle 1 | V | k \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_k^{(0)}} = \frac{|\langle 1 | V | 2 \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} + \frac{|\langle 1 | V | 3 \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_3^{(0)}} = \frac{|\alpha|^2}{-3\hbar\omega} + \frac{|\beta|^2}{-4\hbar\omega}$$

(α, β reell, da V hermitesch). Damit lautet die Grundzustandsenergie bis zur zweiten Ordnung

$$E_1^{(2)} = 2\hbar\omega - \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\alpha^2}{3} + \frac{\beta^2}{4} \right).$$

Der Grundzustand lautet bis zur ersten Ordnung der Störungsrechnung

$$|1\rangle^{(1)} = |1\rangle^{(0)} + \sum_{k \neq 1} \frac{\langle 1 | V | k \rangle}{E_1^{(0)} - E_k^{(0)}} |k\rangle^{(0)} = |1\rangle^{(0)} - \frac{\alpha}{3\hbar\omega} |2\rangle^{(0)} - \frac{\beta}{4\hbar\omega} |3\rangle^{(0)}.$$

(b) Das System befindet sich zu $t = 0$ im Zustand $|2\rangle^{(0)}$. Nach zeitabhängiger Störungsrechnung bestimmen wir zunächst den Überlapp mit den möglichen Endzuständen in der führenden Ordnung,

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{ni}t'} V_{ni}(t') dt', \quad \omega_{ni} = (E_n - E_i)/\hbar.$$

In unserem Problem ist $|i\rangle = |2\rangle^{(0)}$, $|n\rangle = |1\rangle^{(0)}$, $t_0 = 0$, $t > t_1$, $V_{21}(t) = \text{const} = \alpha$, $\omega_{12} = -3\omega$. Damit bekommen wir

$$c_1^{(1)}(t > t_1) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{t_1} e^{i\omega_{12}t'} \alpha dt' = -\frac{i\alpha}{\hbar} \frac{e^{i\omega_{12}t'}}{i\omega_{12}} \Big|_0^{t_1} = \frac{\alpha}{\hbar\omega_{12}} (1 - e^{i\omega_{12}t_1}) = \frac{-\alpha}{3\hbar\omega} (1 - e^{-3i\omega t_1}).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für den Übergang von $|2\rangle^{(0)} \rightarrow |1\rangle^{(0)}$ lautet damit

$$|c_1^{(1)}(t > t_1)|^2 = \left| \frac{\alpha}{3\hbar\omega} \right|^2 (1 - e^{-3i\omega t_1}) (1 - e^{+3i\omega t_1}) = \frac{2\alpha^2}{(3\hbar\omega)^2} (1 - \cos(3\omega t_1)).$$

(c) Mit $\langle 2 | H_0 | 2 \rangle = 2\hbar\omega$ ist der Grundzustand entartet. In entarteter Störungsrechnung müssen wir zunächst die Störung im entarteten Unterraum diagonalisieren. Nennen wir die Submatrix D , dann haben wir folgende Eigenschaften:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also, dass $(1, 1, 0)$ und $(1, -1, 0)$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\pm\alpha$ sind. Die unitäre Transformation in diese Basis ist lediglich eine Rotation um $\pi/4$. Die ungestörten Zustände lauten also in dieser Basis (nach Normierung)

$$|1'\rangle^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle^{(0)} - |2\rangle^{(0)}) , \quad |2'\rangle^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle^{(0)} + |2\rangle^{(0)})$$

Jetzt ist im diagonalisierten Raum die Störungstheorie wie gewohnt anzuwenden. Als Ergebnis für die Energiekorrekturen bekommen wir in dieser Ordnung die Eigenwerte von D und lediglich die gedrehten Zustände (in den Zuständen gibt es ja erst ab der nächsten Ordnung eine Korrektur). Also, alles wieder in der ursprünglichen Basis ausgedrückt:

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= 2\hbar\omega - \alpha, & |1'\rangle^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle^{(0)} - |2\rangle^{(0)}) , \\ E_2^{(1)} &= 2\hbar\omega + \alpha, & |2'\rangle^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle^{(0)} + |2\rangle^{(0)}) , \\ E_3^{(1)} &= 6\hbar\omega, & |3'\rangle^{(0)} &= |3\rangle^{(0)} , \end{aligned}$$

die Störung hebt also die Entartung in symmetrischer Weise auf.

Aufgabe 2: Helizität eines freien Dirac-Teilchens

[5]

Die Eigenvektoren zu $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ mit Eigenwerten ± 1 sind auch Eigenvektoren von $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$ zu Eigenwerten $\pm |\vec{p}|$. Da $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$ offenbar in gleicher Weise auf obere und untere Zweierspinoren wirkt, schreiben wir zunächst $w_1(\vec{p})$ und $w_2(\vec{p})$ als

$$w_1(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+mc^2} \\ \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+mc^2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad w_2(\vec{p}) = \begin{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

mit $M = Nc/(E + mc^2)$. Damit können wir unsere gesuchte Linearkombination durch einen Zweierspinor $\chi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ausdrücken,

$$w(\vec{p}) = \alpha w_1(\vec{p}) + \beta w_2(\vec{p}) = \begin{pmatrix} N \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\chi \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \end{pmatrix}$$

Unser Eigenwertproblem mit dem Spinor $w(\vec{p})$ lautet dann

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{p} w(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N\chi \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \\ M\vec{p}^2\chi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \pm |\vec{p}| \begin{pmatrix} N\chi \\ M(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \end{pmatrix}$$

Die Definition von $\vec{\Sigma}$ und die Identität $\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \vec{p}^2$ sind direkt in den Hinweisen auf dem Aufgabenblatt angegeben. Die letzte Zeile reduziert sich sowohl für die oberen, also auch für die unteren Zweierspinoren auf das Eigenwertproblem $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi = \pm|\vec{p}|\chi$. Wir setzen $\lambda = \pm$ und schreiben explizit

$$\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda|\vec{p}| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Die obere und untere Zeile ergibt jeweils äquivalente Gleichungen für das Verhältnis α/β , wir bekommen

$$\beta = \frac{p_x + ip_y}{p_z + \lambda|\vec{p}|} \alpha \quad \Rightarrow \quad \chi_{\pm} = \begin{pmatrix} p_z \pm |\vec{p}| \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}.$$

Damit lauten schließlich die gesuchte Eigenzustände $w_{\pm}(\vec{p})$ des Helizitätsoperators zu den Eigenwerten ± 1 :

$$w_{\pm}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm \frac{c|\vec{p}|}{E + mc^2} \chi_{\pm} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Identische Teilchen

[4 + 4 + 2 = 10]

(a) Der Spinzustand mit $S = \frac{3}{2}$, $S_z = +\frac{3}{2}$ ist $|+++ \rangle$. Damit ist der Spinanteil vollkommen symmetrisch und der Bahnanteil muss vollkommen antisymmetrisch sein, um das Pauli-Prinzip zu erfüllen. Das kann er nur, wenn die einzelnen Elektronen in verschiedenen Energiezuständen sind. Die geringstmögliche Energie ist damit $E = E_1 + E_2 + E_3$ und der gesuchte Zustand lautet

$$|\Psi\rangle = |+++ \rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_{123} + \psi_{231} + \psi_{312} - \psi_{132} - \psi_{213} - \psi_{321}).$$

(b) Wir können aufgrund des Pauli-Prinzips den niedrigsten Energiezustand der Energie E_1 mit maximal zwei Elektronen besetzen, deren Spins antiparallel sein müssen. Das dritte Elektron ist dann im Zustand mit der Energie E_2 . Die Gesamtenergie des Grundzustandes ist also $E = 2E_1 + E_2$. Weiterhin hat das dritte Elektron die Spinkomponente $|+\rangle$, damit der Gesamtspin $S_z = +\frac{1}{2}$ sein kann. Damit die der Grundzustand antisymmetrisch wird, müssen wir also $\psi_{112}|+-+\rangle$ antisymmetrisieren,

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_{112}|+-+\rangle - \psi_{121}|++-\rangle + \psi_{211}|++-\rangle - \psi_{112}|-++\rangle + \psi_{121}|-++\rangle - \psi_{211}|+-+\rangle).$$

(c) Indem wir $|G\rangle$ umschreiben,

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_{112}(|+-+\rangle - |-++\rangle) + \psi_{121}(|-++\rangle - |++-\rangle) + \psi_{211}(|++-\rangle - |+-+\rangle)),$$

können wir ablesen, dass sich die beiden Elektronen im Zustand E_1 immer in einem Singlet-Zustand befinden (dessen Zweiteilchenzustand uns hinlänglich bekannt ist), z.B. für die ersten zwei Elektronen,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_1 \psi_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) \otimes \psi_2 |+\rangle \right) \quad \text{etc.}$$

Damit ist der Grundzustand also insgesamt ein Dublett, da

$$(\text{Singlett}) \otimes (\text{Dublett}) = (\text{Dublett}),$$

oder $S = \frac{1}{2}$.