Institut für Theoretische Physik der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. F. R. Klinkhamer, PD Dr. R. Hofmann

Theoretische Physik E im Wintersemester 2007/2008

Nachklausur

Name: Michael Karus

Matrikel-Nr.: 1298797

Tutorium:

☐ A	☐ B	☐ C	☒ D	☐ E
☐ F	☐ G	☐ H	☐ I	☐ J
☐ K	☐ L	☐ M	☐ N	☐ O

Friday, 18.04.2008, 13:30 Uhr, Gaede-Hörsaal

Zeit: 2.5 Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: 2 handbeschriebene A4-Seiten (1 Blatt); Wörterbuch

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5
Korrektor	MS	[illegible]	[illegible]	RH	[illegible]
Punkte	2	2P	4	$\frac{1}{2}$/5	0

Gesamtpunktzahl	8,5

Aufgabe NK1: *Degeneriertes Spektrum*

Es seien A und B hermitesche Operatoren mit rein diskretem Spektrum, die miteinander vertauschen. Wir bezeichnen die (möglicherweise entarteten) Eigenwerte mit den zugehörigen kleinen Buchstaben, d.h. es gilt $A|a\rangle = a|a\rangle$ und $B|b\rangle = b|b\rangle$. Weiterhin definieren wir die Projektoren auf den zum Eigenwert a bzw. b gehörenden Eigenraum

$$P_a = \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\langle a,n| \qquad\qquad P_b = \sum_{m=1}^{d^b} |b,m\rangle\langle b,m|, \tag{1}$$

wobei n und m weitere Quantenzahlen zur Beschreibung der Entartung sind und von 1 bis zur Dimension d^a bzw. d^b des jeweiligen Eigenraumes summiert werden.

a) Zeigen Sie, dass für zwei Projektoren auf Eigenräume von A gilt: (1 Punkt)

$$P_a P_{a'} = \delta_{aa'} P_a \tag{2}$$

b) Zeigen Sie unter Ausnutzung von $[A, B] = 0$, dass aus $A|a\rangle = a|a\rangle$ folgt, dass auch $B|a\rangle$ ein Eigenzustand von A zum Eigenwert a ist. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation $\mathbf{1} = \sum_a P_a$, dass es eine orthonormale Basis aus gemeinsamen Eigenzuständen von A und B gibt. (2 Punkte)

Aufgabe NK2: *Addition von Isospins*

In der Teilchenphysik werden alle Hadronen (Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, z.B. Proton und Neutron) als zusammengesetztes System aus Quarks mit den „Flavour"-Quantenzahlen u, d, s, ... betrachtet. Dabei unterscheidet die starke Wechselwirkung nicht zwischen den Quark-Flavours. Die beiden leichtesten Quarks u und d, welche man als entartet bzgl. ihrer Masse auffassen kann, können deshalb als Komponenten eines Isospindubletts angesehen werden, d.h. für die Isospinoperatoren gilt:

$$I_3|u\rangle = \tfrac{1}{2}|u\rangle \qquad I_3|d\rangle = -\tfrac{1}{2}|d\rangle \qquad I_+|d\rangle = |u\rangle \qquad I_-|u\rangle = |d\rangle. \tag{3}$$

Baryonen wie Proton und Neutron sind aus drei Quarks zusammengesetzt.

a) Geben Sie an, in welche irreduziblen Darstellungen der SU(2) das Tensorprodukt dreier Isospin-$\frac{1}{2}$-Darstellungen $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ zerfällt. (1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun das größte in a) gefundene Multiplett und berechnen sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle i_1, i_2, i_3 | j, m\rangle$ mit $i_k = u, d$ $(k = 1, 2, 3)$. (3 Punkte)

c) Nehmen Sie an Quarks seien Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und somit Fermionen. Sind damit die in b) gefundenen Zustände ($|uuu\rangle, \ldots$) erlaubt? (1 Punkt)

Hinweis:
Für die Auf- und Absteigeoperatoren des Drehimpulses gilt allgemein:

$$J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m+1)}\hbar|j,m\pm 1\rangle$$

Aufgabe NK3: *Spinoren*

Gegeben seien zwei Operatoren b_1 und b_2 sowie die dazu adjungierten Operatoren $b_1^\dagger$ bzw. $b_2^\dagger$. Diese Operatoren erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\{b_i^\dagger, b_j\} = \delta_{ij} \qquad \text{und} \qquad \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0 = \{b_i, b_j\} \quad (i,j=1,2)\,, \tag{4}$$

wobei $\{,\}$ der Antikommutator ist.

a) Zeigen Sie, dass die durch $T_{ij} = b_i^\dagger b_j$ definierten Operatoren die Algebra einer $U(2)$ Gruppe erfüllen, d.h. rechnen Sie folgende Beziehung nach: (1 Punkt)

$$[T_{ij}, T_{kl}] = \delta_{kj}T_{il} - \delta_{il}T_{kj} \tag{5}$$

b) Wir definieren aus den Operatoren T_{ij} aus a) die folgenden Operatoren: (1 Punkt)

$$Q = T_{11}+T_{22} \qquad I_3 = T_{11}-T_{22} \qquad I_+ = T_{12} \qquad I_- = T_{21} \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass die I eine SU(2)-Algebra erfüllen, d.h. $[I_+, I_-] = I_3$ und $[I_3, I_\pm] = \pm 2I_\pm$. Zeigen Sie weiterhin, dass Q ~~mit~~ allen I vertauscht.

c) Wir definieren die vier Operatoren (1 Punkt)

$$\Gamma_1 = \mathrm{i}(b_1^\dagger - b_1) \qquad \Gamma_2 = b_1^\dagger + b_1 \qquad \Gamma_3 = \mathrm{i}(b_2^\dagger - b_2) \qquad \Gamma_4 = b_2^\dagger + b_2. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass diese vier Operatoren eine Cliffordalgebra der Form $\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\delta_{ab}$, $(a,b = 1,\cdots,4)$ erfüllen. D.h. die Γ-Matrizen sind Dirac-Matrizen im vierdimensionalen euklidischen Raum.

d) Wir definieren nun den Operator $\Gamma_5 = -\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$. Zeigen Sie unter Ausnutzung der Cliffordalgebra, dass sich Γ_5 schreiben lässt als (1 Punkt)

$$\Gamma_5 = [b_1^\dagger, b_1]\cdot[b_2^\dagger, b_2] = (1-2n_1)(1-2n_2), \tag{8}$$

wobei $n_i = b_i^\dagger b_i$ $(i=1,2)$ die Anzahloperatoren sind.

e) Wir betrachten nun die $b_j^\dagger$ und b_j als Erzeuger und Vernichter eines Fermions im Zustand j. Geben Sie die vier möglichen Zustände an, die sich durch Anwendung dieser Operatoren auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ ergeben und berechnen sie die Wirkung der Projektoren $P_L = \frac{1}{2}(1+\Gamma_5)$ und $P_R = \frac{1}{2}(1-\Gamma_5)$ auf diese Zustände. (1 Punkt)

Aufgabe NK4: *Klein-Gordon-Gleichung im zweidimensionalen Minkowski-Raum*

a) Wir betrachten einen zweidimensionalen Minkowski-Raum mit Koordinaten t, x. Leiten Sie aus dem Ausdruck für die relativistische Energie $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ den Differentialoperator her, dessen Kern durch die Klein-Gordon-Gleichung (1 Punkt)

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\phi = 0 \tag{9}$$

beschrieben wird. Verwenden Sie dazu die üblichen Ersetzungsregeln $p \to \mathrm{i}\hbar\partial_x$ und $E \to \mathrm{i}\hbar\partial_t$ und nehmen Sie $\hbar = c = 1$ an.

b) Zeigen Sie, dass $f(x - vt)$ sowie $f(x + vt)$ allgemeine Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung im masselosen Fall ($m = 0$) sind und bestimmen Sie für diesen Fall v. (2 Punkte)

c) Wir betrachten nun die Greensche Funktion $G(x, y)$, welche die Gleichung (2 Punkte+ 1 Zusatzpunkt)

$$(\partial_{u_t}^2 - \partial_{u_x}^2 + m^2)G(u, v) = \delta^{(2)}(u - v) \tag{10}$$

erfüllt und im Unendlichen verschwindet. Dabei seien u und v die Zweiervektoren mit Komponenten $u = (u_t, u_x)$ und $v = (v_t, v_x)$. Drücken Sie in Gl. (10) die Greensche Funktion $G(u, v)$ sowie $\delta^{(2)}(u - v)$ durch Fourierdarstellungen aus und bestimmen Sie so die Fouriertransformierte $\tilde{G}(k)$ von $G(u, v)$. Welche Uneindeutigkeit ergibt sich für $\tilde{G}(k)$? (Zusatzpunkt)

Aufgabe K5: *Dirac-Gleichung*

Wir betrachten die Dirac-Gleichung

$$(\mathrm{i}\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \tag{11}$$

mit den folgenden beiden expliziten Darstellungen für die γ-Matrizen:

Dirac-Darstellung: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}$ $\quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$

Weyl-Darstellung: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \\ \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$

Dabei sind die σ^j die Pauli-Matrizen $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Schreiben Sie den vierkomponentigen Diracspinor als (2 Punkte)

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_I(x) \\ \psi_{II}(x) \end{pmatrix} \tag{12}$$

wobei ψ_I und ψ_{II} zweikomponentige Spinoren sind. Zerlegen Sie die Dirac-Gleichung in je zwei (gekoppelte) Gleichungen für die Dirac- und die Weyl-Darstellung. Betrachten Sie den Fall das $\Psi(x)$ stationär ist, also die Zeitabhängigkeit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et/\hbar}$ hat.

Wir zerlegen die Energie $E = mc^2 + E_{\text{kin}}$ in einen Anteil, der der Ruhemasse entspricht und einen kinetischen Anteil E_{kin}.

b) Betrachten Sie den nichtrelativistischer Grenzfall $E_{\text{kin}} \ll mc^2$ für Ihre Gleichungen der Dirac-Darstellung aus a) und entwickeln Sie diese Gleichungen in nullter Ordnung in $\frac{E_{\text{kin}}}{mc^2}$. Zeigen Sie, dass ψ_{II} gegenüber ψ_I unterdrückt ist und finden Sie eine Gleichung für ψ_I. (2 Punkte)

c) Betrachten Sie den ultrarelativistischer Grenzfall $E_{\text{kin}} \gg mc^2$ für Ihre Gleichungen der Weyl-Darstellung aus a) und entwickeln Sie diese Gleichungen in nullter Ordnung in $\frac{mc^2}{E_{\text{kin}}}$. Zeigen Sie, dass die beiden Gleichungen in diesem Grenzfall entkoppeln. (1 Punkt)

Michael Karus 1298797

NK 1:

A, B hermitesch (mit diskretem Spektrum) ; $[A,B]=0$

$A = A^\dagger$; $B = B^\dagger$

$A|a\rangle = a|a\rangle \qquad a \in \mathbb{R}$

$B|b\rangle = b|b\rangle \qquad b \in \mathbb{R}$

$$P_a = \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\langle a,n|$$

$$P_b = \sum_{m=1}^{d^b} |b,m\rangle\langle b,m|$$

a) z.z. für zwei Projektoren auf Eigenräume von A gilt:

$$P_a P_{a'} = \delta_{aa'} P_a$$

$$\rightarrow P_a P_{a'} = \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\langle a,n| \cdot \sum_{n'=1}^{d^{a'}} |a',n'\rangle\langle a',n'| =$$

$$= \sum_{n=1}^{d^a} \sum_{n'=1}^{d^{a'}} |a,n\rangle\underbrace{\langle a,n|a',n'\rangle}_{=\delta_{aa'}\cdot\delta_{nn'}}\langle a',n'| =$$

($\delta_{nn'}$ "eliminiert" eine (bzw.) Summe $\Rightarrow n'=n$)

$$\cancel{= \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\,\delta_{aa'}\langle a',n'| = \delta_{aa'} \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\langle n,a'|} =$$

$$= \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\,\delta_{aa'}\langle a',n| = \delta_{aa'} \cdot \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\langle a',n|$$

$$\underline{\underline{= \delta_{aa'} P_a}}$$

qed ✓

1/1

b) $[A, B] = 0$

z.Z: aus $A|a\rangle = a|a\rangle$ folgt, dass $B|a\rangle$ ein EZ von A zum EW a

Bew: $\underline{\underline{A B|a\rangle}} = BA|a\rangle = B \cdot a|a\rangle = \underline{\underline{a \cdot B|a\rangle}}$

$B|a\rangle$ kann als $|\varphi\rangle$ geschrieben werden: $A|\varphi\rangle = a|\varphi\rangle$

$\rightarrow$ EW-Gleichg von A

$\rightarrow$ q.e.d. ✓

1/1

c) $\mathbb{1} = \sum_a P_a$ z.Z: dass es eine orthonormale Basis aus gem. EZ von A und B gibt

~~sei $|\psi_n\rangle$ gem. EZ von A und B mit EW a_n b_n~~

$\cancel{\rightarrow A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle}$

$\cancel{B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle}$

$|\varphi\rangle = B|a\rangle$ ist EZ von A zu EW_a (aus NK1 b))

somit ist $|a\rangle$ EZ von B

$\cancel{|\varphi\rangle = B|a\rangle}$ ~~ist gem. EV für A und B~~

$\mathbb{1} = \sum_a P_a = \sum_a \cdot \sum_{n=1}^{d^a} |a,n\rangle\langle a,n|$ ✓

Daraus folgt was?

Sei $|\psi_n\rangle$ gemeinsamer EV mit EW a_n, b_n

$\rightarrow A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$

$B|\psi_n\rangle = b_n|\psi_n\rangle \rightarrow [A,B]|\psi_n\rangle = (AB - BA)|\psi_n\rangle$

$= (a_n b_n - b_n a_n)|\psi_n\rangle = 0$

0/2

Michael Karas 1298797

②

NK 2:

$J_3\ |u\rangle = \frac{1}{2}\ |u\rangle$

$J_3\ |d\rangle = -\frac{1}{2}\ |d\rangle$

$J_+\ |d\rangle = |u\rangle$

$J_-\ |u\rangle = |d\rangle$

$J_\pm |j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,\hbar\,|j,m\pm1\rangle$

$0 \le l \le n-1$

$-l \le m \le l$

$s = \pm\frac{1}{2}$

$J = -|j_1 - j_2|; \dots; j_1 + j_2$

a) $\underline{\underline{\left(\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}\right) \otimes \frac{1}{2}}} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = 1 \otimes \frac{1}{2} \oplus 0 \otimes \frac{1}{2} =$

$= \underline{\underline{\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}}}$ ✓

1P

b) $\frac{3}{2} = j \rightarrow \langle i_1, i_2, i_3 | j, m\rangle$ $\qquad i_k = u, d \quad (k = 1,2,3)$

~~$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow |u, u, u\rangle$~~

$j = -|i_1 - i_2 - i_3|; \dots; i_1 + i_2 + i_3 =$ $\qquad -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$

$= -\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right|; \dots; \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$

$\rightarrow |j, m\rangle = \left|\frac{3}{2}, ?\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},\right\rangle$

c) Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen -> Fermionen => Pauliverbot gilt!

$|i_1, i_2, i_3\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle$

1P

/2P

Michael Karus 1298797 ③

NK3

$b_1 \quad b_1^+$

$b_2 \quad b_2^+$ $\Big\} - \{ b_i^+ , b_j \} = \delta_{ij}$

$\{ b_i^+ , b_j^+ \} = 0 \rightarrow b_i^+ b_j^+ = - b_j^+ b_i^+$ $\qquad \{ b_i^+ , b_i \} = 1 \rightarrow b_i^+ b_i = 1 - b_i b_i^+$

$\{ b_i , b_j \} = 0 \rightarrow b_i b_j = - b_j b_i$ $\qquad \{ b_i^+ , b_j \} \overset{i \neq j}{=} 0 \rightarrow b_i^+ b_j = - b_j b_i^+$

a) z. z. $T_{ij} = b_i^+ b_j$

d. h. $[T_{ij} , T_{kl}] = \delta_{kj} T_{il} - \delta_{il} T_{kj}$

$\{ b_k^+ , b_j \} = \delta_{kj}$

$\Leftrightarrow b_k^+ b_j + b_j b_k^+ = \delta_{kj}$

$b_j b_k^+ = \delta_{kj} - b_k^+ b_j$

$[T_{ij} , T_{kl}] = T_{ij} \cdot T_{kl} - T_{kl} T_{ij} = b_i^+ b_j \cdot b_k^+ b_l - b_k^+ b_l b_i^+ b_j =$

$= b_i^+ (\delta_{kj} - b_k^+ b_j) b_l - b_k^+ (\delta_{il} - b_i^+ b_l) b_j =$

$= b_i^+ \delta_{kj} \cdot b_l - b_i^+ b_k^+ b_j b_l - b_k^+ \delta_{il} b_j + b_k^+ b_i^+ b_l b_j =$

$= \delta_{kj} b_i^+ b_l - \delta_{il} b_k^+ b_j - \cancel{b_k^+ b_i^+ b_l b_j} + \cancel{b_k^+ b_i^+ b_l b_j} =$

$= \delta_{kj} b_i^+ b_l - \delta_{il} b_k^+ b_j = \underline{\underline{\delta_{kj} T_{il} - \delta_{il} T_{kj}}}$

1P

qed

b) $Q = T_{11} + T_{22}$ $\qquad J_3 = T_{11} - T_{22}$ $\qquad J_+ = T_{12}$ $\qquad J_- = T_{21}$

$= b_1^+ b_1 - b_2^+ b_2$

$[J_+ , J_-] = J_3$

$= J_+ J_- - J_- J_+ = T_{12} T_{21} - T_{21} T_{12} = b_1^+ b_2 b_2^+ b_1 - b_2^+ b_1 b_1^+ b_2 =$

$b_1 b_1^+ = 1 - b_1^+ b_1$

$= (-1) \cdot (-1) \cdot b_1^+ b_1 \cdot b_2 b_2^+ - (-1)(-1) b_2^+ b_2 b_1 b_1^+ =$

$= b_1^+ b_1 \cdot b_2 b_2^+ - b_2^+ b_2 \cdot b_1 b_1^+ = T_{11} \cdot (1 - b_2^+ b_2) - T_{22} (1 - b_1^+ b_1) =$

$= T_{11} - T_{11} T_{22} - T_{22} + T_{22} T_{11} = T_{11} - \cancel{T_{11} T_{22}} - T_{22} + \cancel{T_{11} T_{22}} =$

$[T_{11} , T_{22}] = \delta_{12} T_{12} - \delta_{21} T_{21} = 0$

$= T_{11} - T_{22} = J_3$ qed

$$[J_3, J_\pm] = \pm 2 J_\pm$$

$$= J_3 J_\pm - J_\pm J_3 = (T_{11} - T_{22}) T_{\substack{12\\21}} - T_{\substack{12\\21}} (T_{11} - T_{22}) =$$

$$= T_{11} T_{\substack{12\\21}} - T_{22} T_{\substack{12\\21}} - T_{\substack{12\\21}} T_{11} + T_{\substack{12\\21}} T_{22} =$$

$$\boxed{[\underset{ij}{T_{12}}, \underset{kl}{T_{11}}] = \delta_{12} T_{11} - \delta_{11} T_{12} = -T_{12} \rightarrow T_{12} T_{11} - T_{11} T_{12} = -T_{12}}$$

"obere Zeile" $\rightarrow$ $T_{11} T_{12} - T_{22} T_{12} - T_{12} T_{11} + T_{12} T_{22} =$

$$= T_{12} \underbrace{- T_{22} T_{12} + T_{12} T_{22}}_{= T_{12}} = 2 T_{12} = 2 \cdot J_+$$

$$\boxed{[\underset{ij}{T_{12}}, \underset{kl}{T_{22}}] = \delta_{22} T_{12} - \delta_{12} T_{22} = T_{12} \rightarrow T_{12} T_{22} - T_{22} T_{12} = T_{12}}$$

"untere Zeile" $\rightarrow$ $\underbrace{T_{11} T_{21} - T_{21} T_{11}}_{= -T_{21}} \underbrace{- T_{22} T_{21} + T_{21} T_{22}}_{= -T_{21}} = -2 T_{21} = -2 J_-$

$$\boxed{[\underset{ij}{T_{11}}, \underset{kl}{T_{21}}] = \delta_{21} \cdot T_{11} - \delta_{11} T_{21} = -T_{21} \rightarrow T_{11} T_{21} - T_{21} T_{11} = -T_{21}}$$

$$\boxed{[\underset{ij}{T_{22}}, \underset{kl}{T_{21}}] = \delta_{22} T_{21} - \delta_{21} T_{22} = T_{21} \rightarrow T_{22} T_{21} - T_{21} T_{22} = T_{21}}$$

$$\Rightarrow [J_3, J_\pm] = \pm 2 \cdot T_{\substack{12\\21}} = \pm 2 J_\pm$$

qed

$$[Q, J_3] = Q J_3 - J_3 Q = (T_{11} + T_{22})(T_{11} - T_{22}) - (T_{11} - T_{22})(T_{11} + T_{22}) =$$

$$= T_{11}^2 - T_{22}^2 - T_{11}^2 + T_{22}^2 = 0 \quad \text{qed}$$

$$[Q, J_+] = Q J_+ - J_+ Q = (T_{11} + T_{22}) T_{12} - T_{12} (T_{11} + T_{22}) =$$

$$= T_{11} T_{12} + T_{22} T_{12} - T_{12} T_{11} - T_{12} T_{22} = T_{12} - T_{12} = 0 \qquad \text{qed}$$

somit sind alle $a \neq b \rightarrow = 0$

$$a = b \rightarrow \Gamma_a \Gamma_a + \Gamma_a \Gamma_a \overset{!}{=} 2$$

$\underline{a=1}$ $\rightarrow$ $i(b_1^+ - b_1) \cdot i(b_1^+ - b_1) + i(b_1^+ - b_1) i (b_1^+ - b_1) =$

$$= (-1)(b_1^+ - b_1)^2 + (-1)(b_1^+ - b_1)^2 = -2\,(b_1^+ - b_1)^2 =$$

$$= -2\,(\underbrace{b_1^+ b_1^+}_{=0} - b_1^+ b_1 - b_1 b_1^+ + \underbrace{b_1 b_1}_{=0}) =$$

analog für $\underline{a=3}$

$$= -2 \cdot (-b_1^+ b_1 - \underbrace{b_1 b_1^+}_{=1-b_1^+ b_1}) = -2 \cdot (-b_1^+ b_1 - (+1 - b_1^+ b_1)) =$$

$$= -2 \cdot (-\cancel{b_1^+ b_1} - 1 + \cancel{b_1^+ b_1}) = -2 \cdot (-1) = \underline{\underline{+2}}$$

$\underline{a=2}$ $\rightarrow$ $(b_1^+ + b_1)^2 + (b_1^+ + b_1)^2 = 2\,(b_1^+ + b_1)^2 =$

$$= 2\,(\underbrace{b_1^+ b_1^+}_{=0} + \underbrace{b_1^+ b_1}_{=1-b_1 b_1^+} + b_1 b_1^+ + \underbrace{b_1 b_1}_{=0}) =$$

$$= 2\,((1 - b_1 b_1^+) + b_1 b_1^+) = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}} \quad qed$$

analog für $\underline{\underline{a=4}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{qed}}$

noch 1P

d) $\Gamma_5 = -\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4$

$$(1 - 2 \cdot b_1^+ b_1)(1 - 2 \cdot b_2^+ b_2) = 1 - 2n_1 - 2n_2 + 4 n_1 n_2$$

$\underline{z.z.}$: $\Gamma_5 = [b_1^+, b_1] \cdot [b_2^+ b_2] = (1 - 2n_1)(1 - 2n_2)$

$$= (b_1^+ b_1 - b_1 b_1^+)(b_2^+ b_2 - b_2 b_2^+) = \underbrace{b_1^+ b_1}_{n_1} b_2^+ b_2 - \underbrace{b_1 b_1^+}_{=1-b_1^+ b_1} \underbrace{b_2^+ b_2}_{n_2} - b_1^+ b_1 \overbrace{b_2 b_2^+}^{1-b_2^+ b_2} + b_1 b_1^+ b_2 b_2^+$$

$$= \underbrace{b_1^+ b_1}_{n_1} \underbrace{b_2^+ b_2}_{n_2} - (1 - b_1^+ b_1) b_2^+ b_2 - b_1^+ b_1 (1 - b_2^+ b_2) + b_1 b_1^+ b_2 b_2^+ = n_1 n_2 - \underbrace{b_2^+ b_2}_{n_2} + \underbrace{b_1^+ b_1}_{n_1} \underbrace{b_2^+ b_2}_{n_2} - \underbrace{b_1^+ b_1}_{n_1}$$

$$+ \underbrace{b_1^+ b_1}_{n_1} \underbrace{b_2^+ b_2}_{n_2} + b_1 b_1^+ b_2 b_2^+ = 3 n_1 n_2 - n_2 - n_1 + b_1 b_1^+ b_2 b_2^+$$

→ weiter auf ⑤

Michael Karas 1298797

zu NK3

zu d) $= \underbrace{b_1 b_1^+}_{=1-b_1^+ b_1} \overbrace{b_2 b_2^+}^{=1-b_2^+ b_2} + 3n_1 n_2 - n_2 - n_1 =$

$= (1-\underbrace{b_1^+ b_1}_{n_1})(1-\underbrace{b_2^+ b_2}_{n_2}) + 3n_1 n_2 - n_2 - n_1 =$

$= 1 - n_1 - n_2 + n_1 n_2 + 3n_1 n_2 - n_2 - n_1 = 1 - 2n_1 - 2n_2 + 4n_1 n_2 =$

$= (1-2n_1)(1-2n_2)$ qed ✓

$\Gamma_5 = -\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 = -i(b_1^+ - b_1)(b_1^+ + b_1) i (b_2^+ - b_2)(b_2^+ + b_2) =$

$= +(b_1^+ - b_1)(b_1^+ + b_1)(b_2^+ - b_2)(b_2^+ + b_2) =$

$= (\underbrace{b_1^+ b_1^+}_{=0} - b_1 b_1^+ + b_1^+ b_1 - \underbrace{b_1 b_1}_{=0})(\underbrace{b_2^+ b_2^+}_{=0} - b_2 b_2^+ + b_2^+ b_2 - \underbrace{b_2 b_2}_{=0}) =$

$= (-b_1 b_1^+ + b_1^+ b_1)(-b_2 b_2^+ + b_2 b_2) =$

$= [b_1^+, b_1] \cdot [b_2^+, b_2]$ qed ✓ 1P

e) (b_j^+ Erz.) (b_j Vern.) Fermion! in Zustand j

max. ein Teilchen pro Zustand j erlaubt

$|0\rangle = |n_j\rangle \rightarrow \quad b_j^+ |0\rangle = b_j^+ |\ldots, n_j, \ldots\rangle$

$|n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\rangle$

$|0\rangle = |0, 0, \ldots 0\rangle$

$\rightarrow \quad b_j^+ |\ldots, 0, \ldots\rangle = |\ldots, 1, \ldots\rangle = |1\rangle$

$b_j^+ |\ldots, 1, \ldots\rangle = 0$

$b_j |\ldots, 0, \ldots\rangle = 0$

$b_j |\ldots, 1, \ldots\rangle = |\ldots, 0, \ldots\rangle = |0\rangle$ ✓

Michael Karas 1298797

④

zu NK3

b) $[Q, J_-] = (T_{11} + T_{22}) J_{21} - T_{21}(T_{11} + T_{22}) =$

$= T_{11}T_{21} + T_{22}T_{21} - T_{21}T_{11} - T_{21}T_{22} =$

$= -T_{21} + T_{21} = 0$ ✓ qed

1P

c) $\Gamma_1 = i(b_1^+ - b_1)$ $\Gamma_2 = b_1^+ + b_1$ $\Gamma_3 = i(b_2^+ - b_2)$ $\Gamma_4 = b_2^+ + b_2$

z.z. $\{\Gamma_a, \Gamma_b\} \overset{!}{=} 2\delta_{ab}$

$b_1^+b_1^+ + b_1^+b_1^+ = 0 = b_1b_1 + b_1b_1$

$2b_1^+b_1^+ = 0 = 2b_1b_1$

$b_1^+b_1^+ = 0 = b_1b_1$

$a \neq b \rightarrow \{\Gamma_a, \Gamma_b\} \overset{!}{=} 0$

$= \Gamma_a\Gamma_b + \Gamma_b\Gamma_a$

$a=1, b=2 \rightarrow \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_1 = i(b_1^+ - b_1)(b_1^+ + b_1) + (b_1^+ + b_1)i(b_1^+ - b_1) =$

$= i(b_1^+b_1^+ - b_1b_1^+ + b_1^+b_1 - b_1b_1) + i(b_1^+b_1^+ + b_1b_1^+ - b_1^+b_1 - b_1b_1)$

$= 2i[b_1^+b_1^+ - b_1b_1] = 2i \cdot 0 = 0$ ✓

$a=2, b=3 \rightarrow \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2 = (b_1^+ + b_1)i(b_2^+ - b_2) + i(b_2^+ - b_2)(b_1^+ + b_1) =$

$= i(b_1^+b_2^+ + b_1b_2^+ - b_1^+b_2 - b_1b_2) + i(b_2^+b_1^+ - b_2b_1^+ + b_2^+b_1 - b_2b_1) =$

$= i[\cancel{b_1^+b_2^+} + b_1b_2^+ - \cancel{b_1^+b_2} - \cancel{b_1b_2} + \cancel{(-b_1^+b_2^+)} - \cancel{(-b_1^+b_2)} - b_1b_2^+ + \cancel{b_1b_2}] =$

$= i\,0 = 0$ ✓

~~dies~~ $a=3, b=4$ } analog zu $a=1, b=2$ warum?

$a=1, b=4$ } ~~analog zu a~~ $\Rightarrow \Gamma_1\Gamma_4 + \Gamma_4\Gamma_1 = i(b_1^+ - b_1)(b_2^+ + b_2) + (b_2^+ + b_2)i(b_1^+ - b_1) =$

$= i[b_1^+b_2^+ - b_1b_2^+ + b_1^+b_2 - b_1b_2 + \underbrace{b_2^+b_1^+}_{-b_1^+b_2^+} + b_2b_1^+ - b_2^+b_1 - b_2b_1]$

$a=2, b=4$ } analog warum?

$= 0$ ✓ qed

ebenso Γ_1 mit Γ_3

$b_1^+b_2 = -b_2b_1^+$ ...

P. 1

Michael Karus 1298797

6

NK 4

a) $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$

$\rightarrow (i\hbar\partial_t)^2 = (i\hbar\partial_x)^2 c^2 + (mc^2)^2$

$c = 1$
$\hbar = 1$

$\Rightarrow (i\partial_t)^2 = (i\partial_x)^2 + m^2$

Dass ist eine falsche Operatoridentität!

$\Rightarrow -\partial_t^2 + \partial_x^2 = m^2 \Rightarrow \underline{\underline{\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2 = 0}}$

1/2 / 1 qed

b) $f(x - vt)$ $f(x+vt)$

$\rightarrow (\partial_t^2 - \partial_x^2)\, f(x-vt) = 0$

$\partial_t^2 f(x-vt) - \partial_x^2(f(x-vt)) = 0$ Kettenregel!

$\partial_t \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \partial_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$ 0/2

$\Rightarrow \partial_t(-v) - \partial_x(1) = 0$ (f)

Michael Korus 12987 97

NKS

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

Dirac $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$

Weyl = $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$ $\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$

a) $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_I(x) \\ \psi_{II}(x) \end{pmatrix}$

$$0 = (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\begin{pmatrix} \psi_I(x) \\ \psi_{II}(x) \end{pmatrix} = \left[i\hbar(\gamma^0\partial_0 \overset{+}{-} \gamma^j\partial_j) - mc\right]\begin{pmatrix} \psi_I(x) \\ \psi_{II}(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dirac: $\left\{ i\hbar\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} - \right.\right.$

0