1. Klausur zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2008/09

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

[Hinweis: Bitte halten Sie ihren Studentenausweis bereit. Als Hilfsmittel ist eine handbeschriebene A4-Seite (einseitig beschrieben) zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 13. Januar 2009 in den Übungen.
Die Gesamtzahl der Punkte ist 28. Davon müssen Sie lediglich 25 Punkte erreichen, um 100 % der geforderten Punktzahl zu erhalten.]

Aufgabe 1 **(3 Punkte)**

Hadamard-Gatter:

In der Quanteninformationsverarbeitung spielt das Hadamard-Gatter ein wichtige Rolle,

$$\mathcal{H} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Operator $\mathcal{H}$ unitär ist.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für ein geeignet gewähltes α der Operator $e^{i\alpha(\sigma_x+\sigma_z)/\sqrt{2}}$ das Hadamard Gatter erzeugt. Bestimmen Sie α.

Aufgabe 2 **(9 Punkte)**

Wechselwirkende Spins:

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit folgendem Hamilton-Operator

$$H = \frac{4J}{\hbar^2}\left(S_{x,1}S_{x,2} + S_{y,1}S_{y,2}\right) + \frac{4J'}{\hbar^2} S_{z,1}S_{z,2} \tag{2}$$

wobei J und J' reelle Parameter sind.

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Hamiltonoperator als 4x4 Matrix in den vier Basiszuständen $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$, und $|-,-\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $S_{z,1}$ und $S_{z,2}$ bezeichnen.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenzustände und Energieeigenwerte des Hamilton-Operators, indem Sie die Matrix in (a) diagonalisieren.

(c) (3 Punkte) Zeichnen Sie für festgehaltenes positives J die Eigenwerte von H als Funktion von J' für $J' \in [-2J, 2J]$. Was ist jeweils der Grundzustand? Diskutieren Sie speziell die Entartungen für die Fälle $J' = -J$, $J' = J$.

(d) (1 Punkt) Was ergibt sich für den Spezialfall $J = 0$?

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Geladener harmonischer Oszillator:

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator sei durch $H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$ charakterisiert. Das Teilchen sei zusätzlich geladen (Ladung q), und ein elektrisches Feld $E(t) = E_0\cos(\omega_0 t)$ sei in x-Richtung angelegt, was zu einem weiteren Term im Hamiltonoperator von der Form $H_1(t) = -qE(t)X$ führt. Betrachten Sie $H_1(t)$ als Störung zum ungestörten Hamiltonoperator H_0.

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie den Hamiltonoperator $H(t) = H_0 + H_1(t)$ des Teilchens unter Benutzung der Erzeuger und Vernichter $a^\dagger$ und a. Benutzen Sie dazu die Relation $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Kommutatoren von a und $a^\dagger$ mit $H = H_0 + H_1$. Stellen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $a(t)$ und $a^\dagger(t)$ im Heisenbergbild mit dem Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1(t)$ auf.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie durch Anwendung auf beliebige Eigenzustände $|n\rangle$ des Teilchenzahloperators $n = a^\dagger a$ die Operatoridenditäten

$$e^{iH_0t/\hbar} a e^{-iH_0t/\hbar} = e^{-i\omega t} a \qquad \text{und} \qquad e^{iH_0t/\hbar} a^\dagger e^{-iH_0t/\hbar} = e^{i\omega t} a^\dagger. \tag{3}$$

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie unter Verwendung von Gl. (3) den Operator $H_1(t)$ im Wechselwirkungsbild.

(e) (1 Punkt) Das System befinde sich im Grundzustand des ungestörten Hamiltonoperators H_0. Berechnen Sie unter Verwendung der Goldenen Regel der Quantenmechanik die Übergangsrate pro Zeit $\Gamma_{g\to e}$ vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand des Oszillators als Funktion von ω_0.

Aufgabe 4 **(9 Punkte)**

Dreiatomiges Molekül:

Betrachten Sie ein Elektron eines linearen, dreiatomigen Moleküls, welches aus Atomen A, B und C besteht. Wir bezeichnen mit $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$ drei orthonormale Elektronenzustände, die an den Atomen A, B und C lokalisiert seien. Wir beschränken uns auf den Unterraum der durch diese drei Zustände aufgespannt wird. Wenn wir die Möglichkeit des Hüpfens von Atom zu Atom vernachlässigen, ist die Energie des Elektrons durch den Hamiltonoperator H_0 bestimmt, dessen drei Eigenzustände $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$ sind. Wir nehmen an, dass alle drei den gleichen Eigenwert E_0 haben. Die Kopplung zwischen den Zuständen $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$ werde durch einen zusätzlichen Term im Hamiltonoperator W erzeugt mit der Eigenschaft

$$W|\phi_A\rangle = -\tau|\phi_B\rangle, \qquad W|\phi_B\rangle = -\tau|\phi_A\rangle - \tau|\phi_C\rangle, \qquad W|\phi_C\rangle = -\tau|\phi_B\rangle, \tag{4}$$

wobei τ ein reeller positiver Hüpfparameter ist.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Energien und stationären Zustände des Hamiltonoperators $H = H_0 + W$.

(b) (1 Punkt) Das Elektron sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\Psi(0)\rangle = |\phi_B\rangle$. Berechnen Sie die Zeitentwicklung $|\Psi(t)\rangle$ des Zustands.

(c) (4 Punkte) Eine Observable D (die ein Maß für die elektrische Polarisation des Moleküls ist) habe die Eigenzustände $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$ mit den Eigenwerten, die durch die Eigenwertgleichungen $D|\phi_A\rangle = -d|\phi_A\rangle$, $D|\phi_B\rangle = 0$ und $D|\phi_C\rangle = d|\phi_C\rangle$ gegeben sind. Das Elektron sei für Zeiten $t < 0$ im Grundzustand. Zur Zeit $t = 0$ werde die Observable D gemessen, das Resultat der Messung sei 0. Zur Zeit $t > 0$ werde eine zweite Messung von D durchgeführt. Welche Werte können mit welchen Wahrscheinlichkeiten gemessen werden?

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle D\rangle$ sowie die Varianz ΔD für den Grundzustand des Elektrons.