

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK E

1. KLAUSUR

Prof. Dr. G. Schön und Priv.Doiz. Dr. M. Eschrig

Wintersemester 2008/2009

Aufgabe 1

3 Punkte

(a)

$$\mathcal{H}^\dagger \mathcal{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Der Operator ist unitär.

1 Punkt

(b)

Unter Verwendung von

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) \right)^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \quad (2)$$

folgt

$$e^{i\alpha(\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}} = \cos(\alpha) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) \sin(\alpha).$$

1 Punkt

Wir setzen $\alpha = \pi/2$ und erhalten

1 Punkt

$$e^{i\alpha(\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) = \mathcal{H}. \quad (3)$$

Aufgabe 2

9 Punkte

(a)

$$|+, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |+, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-, +\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

und

$$H = J(\sigma_{x,1}\sigma_{x,2} + \sigma_{y,1}\sigma_{y,2}) + J'\sigma_{z,1}\sigma_{z,2}. \quad (5)$$

Wir verwenden

$$\sigma_{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{x,1}\sigma_{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\sigma_{y,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{y,2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{y,1}\sigma_{y,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\sigma_{z,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{z,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{z,1}\sigma_{z,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Bis hierher gibt es

1 Punkt

Wir erhalten

$$H = \begin{pmatrix} J' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J' & 2J & 0 \\ 0 & 2J & -J' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J' \end{pmatrix} \quad (9)$$

1 Punkt

(b)

Einen Energieeigenwert liest man sofort ab, und erhält mit zweifacher Entartung J' . Die anderen beiden Eigenwerte erhält man aus der Bedingung $(J' + E)^2 = 4J^2$, was auf $2J - J'$ und $-2J - J'$ führt. Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind

$$E_+ = 2J - J' \quad \vec{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

1 Punkt

$$E_0 = J' \quad \vec{e}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

1 Punkt

$$E_- = -2J - J' \quad \vec{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

1 Punkt

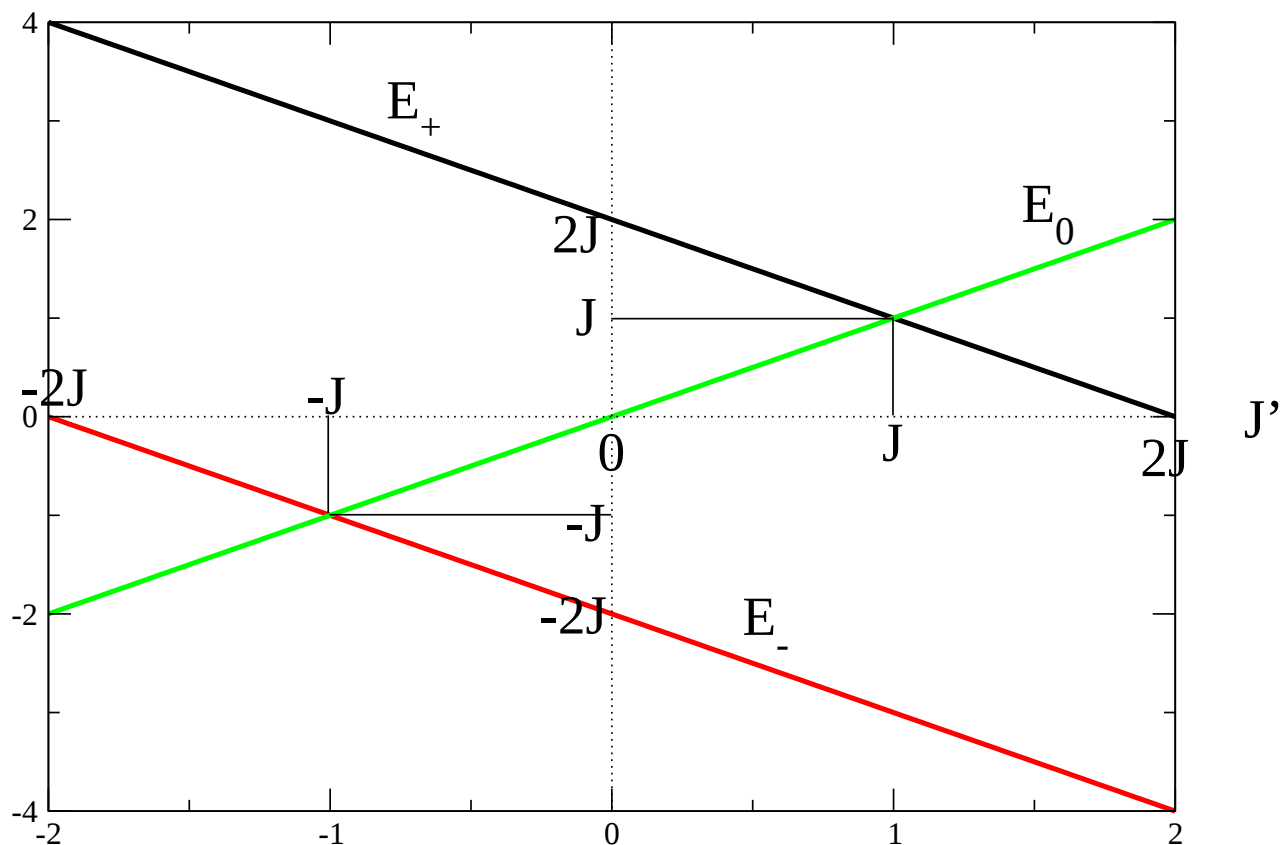


Abbildung 1: Eigenwerte als Funktion von J' . 1 Punkt

Der Grundzustand ist für $J' < -J$ der zweifach entartete Zustand mit Energie E_0 , und für $J' > -J$ der einfache Zustand mit Energie E_- . 1 Punkt

Für $J' = -J$ ist der Zustand dreifach entartet, und für $J' = J$ ist er ebenfalls dreifach entartet. (Der Fall $J' = J$ entspricht genau dem Singulett und Triplettzustand.) 1 Punkt

(d)

Für $J = 0$ haben wir zwei Doublets, mit zwei zweifach entarteten Zuständen bei Energien $E_+ = E_- = -J'$ und $E_0 = J'$. 1 Punkt

Das kann man auch direkt aus dem Hamiltonoperator sehen, da ja dann nur die beiden Zustände 'parallel' und 'antiparallel' existieren, und beide auf je zwei Arten realisiert werden können.

Aufgabe 3

7 Punkte

(a)

Es ist einfach

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - qE(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a).$$

1 Punkt

Hier kann man auch $n = a^\dagger a$ ersetzen.

(b)

Wir schreiben $qE(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \hbar\Omega(t)$. Wir haben dann

1 Punkt

$$[a, H] = \hbar\omega(aa^\dagger a - a^\dagger aa) - \hbar\Omega(t)(aa^\dagger - a^\dagger a) = \hbar\omega a - \hbar\Omega(t), \quad (9)$$

und

$$[a^\dagger, H] = \hbar\omega(a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger aa^\dagger) - \hbar\Omega(t)(a^\dagger a - aa^\dagger) = -\hbar\omega a^\dagger + \hbar\Omega(t), \quad (10)$$

woraus folgt

$$\dot{a}(t) = -i\omega a(t) + i\Omega(t) \quad \dot{a}^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t) - i\Omega(t).$$

1 Punkt

(c)

Anwenden von

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} \quad (11)$$

auf $|n\rangle$ ergibt

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} |n\rangle = e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t n} |n\rangle = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{-i\omega t n} a |n\rangle = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{-i\omega t n} \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (12)$$

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} |n\rangle = e^{i\omega t(n-1)} e^{-i\omega t n} \sqrt{n} |n-1\rangle = e^{-i\omega t} \sqrt{n} |n-1\rangle = e^{-i\omega t} a |n\rangle$$

1 Punkt

und

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} |n\rangle = e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t n} |n\rangle = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{-i\omega t n} a^\dagger |n\rangle = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{-i\omega t n} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (13)$$

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} |n\rangle = e^{i\omega t(n+1)} e^{-i\omega t n} \sqrt{n+1} |n+1\rangle = e^{i\omega t} \sqrt{n+1} |n+1\rangle = e^{i\omega t} a^\dagger |n\rangle.$$

1 Punkt

(d)

Wir erhalten einfach

$$H_1(t) = -\hbar\Omega e^{i\omega t a^\dagger a} (a^\dagger + a) e^{-i\omega t a^\dagger a} = -\hbar\Omega (a^\dagger e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}).$$

1 Punkt

(e)

Nach der Goldenen Regel der Quantenmechanik ist

$$\Gamma_{g \rightarrow e} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n=1 | \hbar\Omega(t) (a e^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) | n=0 \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (14)$$

und durch Einsetzen der Matrixelemente

$$\Gamma_{g \rightarrow e} = 2\pi\Omega^2(t) \delta(\omega - \omega_0).$$

1 Punkt

Aufgabe 4

9 Punkte

(a)

Wir haben

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -\tau & 0 \\ -\tau & E_0 & -\tau \\ 0 & -\tau & E_0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

mit den Eigenwerten und Eigenvektoren

$$E_+ = E_0 + \sqrt{2}\tau, \quad |+\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{1 Punkt}$$

$$E_0, \quad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{1 Punkt}$$

$$E_- = E_0 - \sqrt{2}\tau, \quad |-\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{1 Punkt}$$

(Eigenvektoren bis auf Phasenfaktoren).

(b)

Es ist

$$|\Phi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle - |+\rangle), \quad (16)$$

und somit

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}}{\sqrt{2}} \left(|-\rangle e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2}\tau t} - |+\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2}\tau t} \right). \quad \text{1 Punkt}$$

(c)

Durch die Messung zur Zeit $t = 0$ von $D = 0$ wird das Elektron in den Eigenzustand $|\Phi_B\rangle$ von D ,

$$|\Phi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle - |+\rangle) \quad \text{1 Punkt}$$

gebracht, von wo es sich weiterentwickelt. Zu späteren Zeiten ist die Lösung gerade $|\Psi(t)\rangle$ aus der letzten Teilaufgabe, also

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}}{\sqrt{2}} \left(|-\rangle e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2}\tau t} - |+\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2}\tau t} \right) \quad (17)$$

$$= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{1}{2}|\Phi_A\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_B\rangle + \frac{1}{2}|\Phi_C\rangle \right) e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2}\tau t} - \left(\frac{1}{2}|\Phi_A\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_B\rangle + \frac{1}{2}|\Phi_C\rangle \right) e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2}\tau t} \right) \quad (18)$$

$$= \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t}}{\sqrt{2}} \left(i|\Phi_A\rangle \sin(\sqrt{2}\tau t/\hbar) + \sqrt{2}|\Phi_B\rangle \cos(\sqrt{2}\tau t/\hbar) + i|\Phi_C\rangle \sin(\sqrt{2}\tau t/\hbar) \right) \quad (19)$$

Es können also folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten gemessen werden:

$$D = -d \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad \frac{1}{2} \sin^2(\sqrt{2}\tau t/\hbar) \quad \text{1 Punkt}$$

$$D = 0 \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad \cos^2(\sqrt{2}\tau t/\hbar) \quad \text{1 Punkt}$$

$$D = d \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad \frac{1}{2} \sin^2(\sqrt{2}\tau t/\hbar). \quad \text{1 Punkt}$$

(d)

Der Erwartungswert $\langle D \rangle$ für den Grundzustand ist

$$\langle D \rangle = \langle -|D|-\rangle = \frac{1}{4}(-d + 2 \cdot 0 + d) = 0.$$

0.5 Punkte

Weiter ist

$$\langle D^2 \rangle = \langle -|D^2|-\rangle = \frac{1}{4}(d^2 + 2 \cdot 0 + d^2) = \frac{d^2}{2} \quad (20)$$

Also ist die Varianz

$$\sqrt{\langle D^2 \rangle - \langle D \rangle^2} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

0.5 Punkte
