2. Klausur zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2008/09

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

[Hinweis: Bitte halten Sie ihren Studentenausweis bereit. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt (zweiseitig beschrieben) zugelassen.
Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 13. Februar 2009 im Seminarraum 2.17.
Die Gesamtzahl der Punkte ist 28. Davon müssen Sie lediglich 25 Punkte erreichen, um 100 % der geforderten Punktzahl zu erhalten.]

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Reduzierte Dichtematrix:
Betrachten Sie zwei Spins mit $S = \frac{1}{2}$ im Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$.

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie die Dichtematrix $\hat{\rho}$ in der Basis $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ auf. Überprüfen Sie explizit, dass es sich bei Ihrem Ergebnis um einen reinen Zustand handelt.

(b) (2 Punkte) Nehmen Sie jetzt an, dass nur der Spin $\vec{S}_1$ als Messgröße interessiert. Bestimmen Sie die reduzierte Dichtematrix, indem Sie den zweiten Spin "ausspuren", d. h. berechnen Sie $\rho^{red}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=\uparrow,\downarrow} \rho_{\alpha\gamma,\beta\gamma}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}^{red}$ einen gemischten Zustand beschreibt.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Jaynes-Cummings-Modell:
Betrachten Sie ein Zweizustandssystem (Grundzustand g, angeregter Zustand e), das an einen harmonischen Oszillator gekoppelt ist und durch den Hamiltonoperator

$$H = \hbar\omega a^\dagger a - \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z + \hbar\gamma(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \tag{1}$$

mit

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

beschrieben wird. Nehmen Sie an, dass das System sich zur Zeit $t = 0$ im Quantenzustand $|\Psi(t = 0)\rangle = |n, g\rangle$ befindet, wobei $|n, g\rangle$ bzw. $|n, e\rangle$ die Eigenzustände des Hamiltonoperators für das ungekoppelte System ($\gamma = 0$) sind.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie durch Einsetzen von $|\Psi(t)\rangle = \alpha(t)|n, g\rangle + \beta(t)|n - 1, e\rangle$ in die zeitabhängige Schrödingergleichung, dass die Lösung der Schrödingergleichung mit obiger Anfangsbedingung bei $t = 0$ nicht aus dem Unterraum, der durch die beiden Zustände $|n, g\rangle$ und $|n - 1, e\rangle$ aufgespannt wird, herausführt.

(b) (4 Punkte) Leiten Sie die Schrödingergleichung im zweidimensionalen Unterraum,

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

her, d.h. bestimmen Sie die 2x2-Matrix A, und finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für den Spezialfall $\omega = \omega_{eg}$. Leiten Sie daraus die Lösung für $|\Psi(t)\rangle$ als Funktion der Zeit mit der obigen Anfangsbedingung $|\Psi(t = 0)\rangle = |n, g\rangle$ her.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe des in (b) erhaltenen Zustands $|\Psi(t)\rangle$ die Erwartungswerte $\langle\hat{n}\rangle \equiv \langle a^\dagger a\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

<u>CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten:</u>

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Drehimpulsen $j_1 = 2$ und $j_2 = 1$ und entsprechenden Drehimpulsoperatoren $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$. Der Gesamtdrehimpuls sei $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Ermitteln Sie die möglichen Eigenzustände $|J, M\rangle$ von $\vec{J}^2$ and J_z und drücken Sie die Zustände

(a) (2 Punkte) $|J, M\rangle = |3, 2\rangle$,

(b) (3 Punkte) $|J, M\rangle = |3, 1\rangle$,

(c) (3 Punkte) $|J, M\rangle = |2, 2\rangle$

durch die Zustände $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ aus, d.h. berechnen Sie die entsprechenden CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten.

Hinweis: Folgende Formel ist hilfreich:

$$J_-|j, m\rangle \quad = \quad \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle. \tag{4}$$

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

<u>DIRAC-Matrizen:</u>

Zeigen Sie, dass für die DIRAC-Matrizen $\vec{\alpha}$, β, und γ^ν die beiden Relationen

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 = (\vec{p})^2, \qquad (\gamma^\mu p_\mu)^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \tag{5}$$

gelten. [Hinweis: $\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbf{1}$, $\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = \mathbf{0}$, $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbf{1}$, $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$.]

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

<u>DIRAC-Gleichung im homogenen Magnetfeld:</u>

Ein Elektron mit der Ladung $q = -e$ und der Ruhemasse m bewege sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$. Dieses Magnetfeld werde durch das Vektorpotential $\vec{A} = (-By, 0, 0)$ beschrieben.

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Spinor Ψ in der stationären DIRAC-Gleichung

$$\frac{1}{c}\left(E - \beta mc^2\right)\Psi = \alpha^i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{q}{c}A_i\right)\Psi \tag{6}$$

in der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ und leiten Sie daraus eine Eigenwertgleichung für den zweikomponentigen Spinor ϕ_1 her, indem Sie den Spinor ϕ_2 eliminieren.

(b) (2 Punkte) Bringen Sie diese Eigenwertgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$\phi_1(x, y, z) = \chi_1(y)e^{i(k_x x + k_z z)} \tag{7}$$

sowie durch die Variablensubstitution

$$\xi = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\left(y - \frac{\hbar c k_x}{eB}\right) \tag{8}$$

in die Form

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + a_\sigma\right)\chi_1 = 0. \tag{9}$$

Bestimmen Sie a_σ für die Spinkomponenten $\sigma = \pm 1$.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E_n aus der Bedingung, dass der Koeffizient a_σ die ganzzahligen Werte $2n + 1$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ annehmen muss.