

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK E

2. KLAUSUR

Prof. Dr. G. Schön und Priv.Do. Dr. M. Eschrig

Wintersemester 2008/2009

Aufgabe 1

4 Punkte

a.)

$$\Rightarrow |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)(\langle\uparrow\uparrow| - \langle\downarrow\downarrow|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{matrix}$$

1 Punkt

Rein, da $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

1 Punkt

b.)

Reduzierte Dichtenmatrix:

$$\rho_{\uparrow\uparrow}^{\text{red}} = \rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow} + \rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2} = \rho_{\downarrow\downarrow}^{\text{red}}$$

$$\rho_{\uparrow\downarrow}^{\text{red}} = \rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\uparrow} + \rho_{\uparrow\downarrow,\downarrow\downarrow} = 0 = \rho_{\downarrow\uparrow}^{\text{red}}$$

Also ist

$$\hat{\rho}^{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1 Punkt

gemischt, da

$$(\hat{\rho}^{\text{red}})^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \neq \hat{\rho}^{\text{red}}$$

1 Punkt

Aufgabe 2

8 Punkte

(a)

SCHRÖDINGERGleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (1)$$

Ansatz einsetzen:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\alpha} |n, g\rangle + i\hbar \dot{\beta} |n-1, e\rangle &= \hbar\omega \alpha |n, g\rangle + \hbar\omega \beta (n-1) |n-1, e\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \alpha |n, g\rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega_{eg} \beta |n-1, e\rangle \\ &\quad + \hbar\gamma \sqrt{n} \alpha |n-1, e\rangle + \hbar\gamma \sqrt{n} \beta |n, g\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Da die Anfangsbedingung mittels $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$ dargestellt werden kann, folgt daraus dass die Lösung nicht aus dem Unterraum herausführt. 2 Punkte

(b)

Wir projizieren aus der Gleichung (2) die beiden Gleichungen

$$i\hbar \dot{\alpha} = \hbar \left(n\omega - \frac{1}{2} \omega_{eg} \right) \alpha + \hbar\gamma \sqrt{n} \beta \quad (3)$$

und

$$i\hbar \dot{\beta} = \hbar \left((n-1)\omega + \frac{1}{2} \omega_{eg} \right) \beta + \hbar\gamma \sqrt{n} \alpha \quad (4)$$

und somit

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} & \hbar\gamma\sqrt{n} \\ \hbar\gamma\sqrt{n} & (n-1)\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Wir setzen $\omega = \omega_{eq}$ und erhalten

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) & \hbar\gamma\sqrt{n} \\ \hbar\gamma\sqrt{n} & \hbar\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus

$$\hbar\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) - E = \mp \hbar^2 \gamma^2 n$$

oder

$$E_{\pm} = \hbar\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \pm \hbar^2 \gamma^2 n$$

Die entsprechenden Eigenzustände sind

$$|e_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung für $|\Psi(t)\rangle$ mit $|\Psi(0)\rangle = |n, g\rangle$ ist

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega(n-\frac{1}{2})t} \left(\cos(\gamma\sqrt{n}t) |n, g\rangle - i \sin(\gamma\sqrt{n}t) |n-1, e\rangle \right)$$

(c)

$$\langle \Psi(t) | a^\dagger a | \Psi(t) \rangle = n - \sin^2(\gamma\sqrt{n}t) \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\langle \Psi(t) | \sigma_z | \Psi(t) \rangle = \cos^2(\gamma\sqrt{n}t) - \sin^2(\gamma\sqrt{n}t) = \cos(2\gamma\sqrt{n}t) \quad (1 \text{ Punkt})$$

Aufgabe 3

8 Punkte

(a)

Wir starten mit dem Zustand

$$|3, 3\rangle = |2, 1; 2, 1\rangle, \quad (7)$$

und wenden darauf J_- an:

$$J_-|3, 3\rangle = \sqrt{6}\hbar|3, 2\rangle = 2\hbar|2, 1; 1, 1\rangle + \sqrt{2}\hbar|2, 1; 2, 0\rangle \quad (8)$$

oder

$$|3, 2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1; 2, 0\rangle.$$

2 Punkte

(b)

Wir wenden wieder J_- an,

$$J_-|3, 2\rangle = \sqrt{10}\hbar|3, 1\rangle = 2\hbar|2, 1; 0, 1\rangle + \sqrt{\frac{4}{3}}\hbar|2, 1; 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{4}{3}}\hbar|2, 1; 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|2, 1; 2, -1\rangle \quad (9)$$

oder

$$|3, 1\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|2, 1; 0, 1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}|2, 1; 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|2, 1; 2, -1\rangle.$$

3 Punkte

(c)

Als nächstes brauchen wir die Eigenvektoren $|2, 2\rangle$, der zu $|3, 2\rangle$ orthogonal sein muss. Wir schreiben

$$|2, 2\rangle = \alpha|2, 1; 1, 1\rangle + \beta|2, 1; 2, 0\rangle \quad (10)$$

und fordern

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha + \sqrt{\frac{1}{3}}\beta = 0 \quad (11)$$

was mit $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 = 1$ auf

$$|2, 2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1; 1, 1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 2, 0\rangle$$

3 Punkte

führt (bis auf ein Gesamtvorzeichen, das noch beliebig gewählt werden kann).

Aufgabe 4

2 Punkte

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 = \alpha^i p_i \alpha^j p_j = p_i p_j \alpha^i \alpha^j = p_j p_i \alpha^j \alpha^i = p_i p_j \frac{1}{2} (\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) = p_i p_j \delta^{ij} \mathbf{1} = p_i p^i = (\vec{p})^2$$

1 Punkt

$$(\gamma^\mu p_\mu)^2 = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} \mathbf{1} = p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - (\vec{p})^2$$

1 Punkt

Aufgabe 5

6 Punkte

(a)

Die stationäre DIRAC-Gleichung lautet

$$\frac{1}{c} (E - \beta mc^2) \Psi = \alpha^i \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{q}{c} A_i \right) \Psi. \quad (12)$$

Die beiden gewünschten Teilgleichungen sind

1 Punkt

$$\frac{1}{c} (E - mc^2) \phi_1 = \sigma^i \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{q}{c} A_i \right) \phi_2 \quad (13)$$

und

$$\frac{1}{c} (E + mc^2) \phi_2 = \sigma^i \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{q}{c} A_i \right) \phi_1. \quad (14)$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste ergibt

$$\frac{1}{c^2} [E^2 - m^2 c^4] \phi_1 = \left[\sigma^i \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{q}{c} A_i \right) \right]^2 \phi_1. \quad (15)$$

1 Punkt

(b)

Wir setzen den Ansatz

$$\phi_1(x, y, z) = \chi_1(y) e^{i(k_x x + k_z z)} \quad (16)$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} [E^2 - m^2 c^4] \chi_1(x) &= \left[-i\hbar \sigma^y \frac{\partial}{\partial y} + \sigma^x \left(\hbar k_x - \frac{e}{c} B y \right) + \hbar k_z \sigma^z \right] \left[-i\hbar \sigma^y \frac{\partial}{\partial y} + \sigma^x \left(\hbar k_x - \frac{e}{c} B y \right) + \hbar k_z \sigma^z \right] \chi_1(x) \\ &= \left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\hbar k_x - \frac{e}{c} B y \right)^2 + \hbar^2 k_z^2 + \frac{\hbar e}{c} B \sigma^z \right] \chi_1(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Dies führt auf die Eigenwertgleichung

$$\hbar^2 \frac{d^2 \chi_1}{dy^2} - \left(\hbar k_x - \frac{e}{c} B y \right)^2 \chi_1 + \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - \hbar^2 k_z^2 - \frac{\hbar e}{c} B \sigma^z \right) \chi_1 = 0 \quad (17)$$

1 Punkt

Eine solche Eigenwertgleichung ist bekannt vom harmonischen Oszillator. Wir führen die dimensionslose Variable

$$\xi = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \left(y - \frac{\hbar k_x}{eB} \right), \quad \frac{d^2}{d\xi^2} = \frac{\hbar c}{eB} \frac{d^2}{dy^2} \quad (17)$$

ein und erhalten für die Spinkomponente in z -Richtung, $\sigma = \pm 1$,

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + a_\sigma \right) \chi_1(y) = 0, \quad a_\sigma = \frac{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - \hbar^2 k_z^2 + \hbar q \sigma B}{\hbar e B}. \quad (18)$$

1 Punkt

(c)

Die Energieeigenwerte sind gegeben durch $a_\sigma = (2n + 1)$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$, also durch die Gleichung

$$E_{n,\sigma}^2 = (2n + 1 + \sigma) \hbar c e B + m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k_z^2 \quad (18)$$

Mit der Abkürzung $2n + 1 + \sigma = 2n'$, und (wegen $\hbar k_z = p_z$) erhalten wir

$$E_{n'} = \pm \sqrt{(mc^2)^2 + (cp_z)^2 + 2n' \hbar c e B}. \quad (19)$$

2 Punkte