Nachklausur zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2008/09

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

[Hinweise: Bitte halten Sie ihren Studentenausweis bereit. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes A4-Blatt (zweiseitig beschrieben) zugelassen.
-Die Nachklausur ersetzt die schlechtere der beiden ersten Klausuren.
-Die Ausgabe der Klausuren erfolgt im Sekretariat des Instituts für Theoretische Festkörperphysik im 11. Stock des Physikhochhauses ab Freitag.
-Die Gesamtzahl der Punkte ist 30. Davon müssen Sie lediglich 25 Punkte erreichen, um 100 % der geforderten Punktzahl zu erhalten.]

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Wechselwirkende Spins:

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit folgendem Hamilton-Operator

$$H = \frac{4}{\hbar^2} \left(J_x \; S_{x,1}S_{x,2} + J_y \; S_{y,1}S_{y,2} + J_z \; S_{z,1}S_{z,2}\right) \tag{1}$$

wobei J_x, J_y, und J_z reelle Parameter sind, die die Wechselwirkung zwischen den Spins beschreiben.

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie den Hamiltonoperator als 4x4 Matrix in den vier Basiszuständen $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$, und $|-,-\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $S_{z,1}$ und $S_{z,2}$ bezeichnen.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators.

Aufgabe 2 **(9 Punkte)**

Dreiatomiges Molekül:

Betrachten Sie ein Elektron eines linearen, dreiatomigen Moleküls, welches aus Atomen A, B und C besteht. Die zugehörigen drei orthonormalen atomaren Elektronenzustände seien $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$. Der Hamiltonoperator $H = H_0 + W$ bestehe aus dem Anteil H_0 mit den Eigenzuständen $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$ und Eigenwerten $E_A = E_C = 0$ und $E_B = \varepsilon > 0$, sowie einem Hüpfterm W mit

$$W|\phi_A\rangle = -\tau|\phi_B\rangle, \qquad W|\phi_B\rangle = -\tau|\phi_A\rangle - \tau|\phi_C\rangle, \qquad W|\phi_C\rangle = -\tau|\phi_B\rangle, \tag{2}$$

wobei τ ein reeller positiver Hüpfparameter ist.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Energien und stationären Zustände von H.

(b) (4 Punkte) Eine Observable $\mathcal{P}$ (die ein Maß für die elektrische Polarisation des Moleküls ist) habe die Eigenzustände $|\phi_A\rangle$, $|\phi_B\rangle$ und $|\phi_C\rangle$ mit entsprechenden Eigenwerten $\mathcal{P}_A = -d$, $\mathcal{P}_B = 0$ und $\mathcal{P}_C = d$. Zur Zeit $t = 0$ werde die Observable $\mathcal{P}$ gemessen, das Resultat der Messung sei 0. Zur Zeit $t > 0$ werde eine zweite Messung an $\mathcal{P}$ durchgeführt. Welche Werte können mit welchen Wahrscheinlichkeiten gemessen werden?

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Korrekturen zu den Eigenwerten in erster Ordnung Störungstheorie, wenn ein zusätzlicher Term W' im Hamiltonoperator mit

$$W'|\phi_A\rangle = -\tau'|\phi_C\rangle, \qquad W'|\phi_C\rangle = -\tau'|\phi_A\rangle, \tag{3}$$

wobei $\tau' > 0$ und reell, betrachtet wird.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten:

Betrachten Sie zwei Teilchen mit Drehimpulsen $j_1 = 3/2$ und $j_2 = 1/2$ und entsprechenden Drehimpulsoperatoren $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$. Der Gesamtdrehimpuls sei $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Drücken Sie die Eigenzustände $|J, M\rangle$ von $\vec{J}^2$ and J_z für

(a) (2 Punkte) $|J, M\rangle = |2, 1\rangle$,

(b) (2 Punkt3) $|J, M\rangle = |2, 0\rangle$,

(c) (2 Punkte) $|J, M\rangle = |1, 1\rangle$

durch die Zustände $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ aus, d.h. berechnen Sie die entsprechenden CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten.

Hinweis: Folgende Formel ist hilfreich: $J_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j, m-1\rangle$.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

DIRAC-Gleichung:

Betrachten Sie den DIRAC-HAMILTONoperator für freie Teilchen $H = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \beta mc^2$, mit den DIRAC-Matrizen

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

(a) (3 Punkte) Für die Zitterbewegung eines freien DIRAC-Teilchens mit Impuls $\vec{p} = p\vec{e}_x$ sind Mischungen $\Psi(x,t) = A\{u(x,t) - \rho \cdot v(x,t)\}$ zwischen Impulseigenzuständen mit positiver und negativer Energie

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{cp}{E+mc^2} \end{pmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}}{\sqrt{\frac{2mc^2}{E+mc^2}}}, \quad v(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{cp}{-E-mc^2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(px+Et)}}{\sqrt{\frac{2mc^2}{E+mc^2}}}, \tag{5}$$

interessant, wobei A eine geeignete Normierungskonstante, $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$, und ρ ein Mischparameter ist. Bestimmen Sie ρ so, dass die vierte Komponente von $\Psi(x,t)$ bei $t = 0$ verschwindet. Berechnen Sie damit den Erwartungswert der Teilchenstromdichte, $j_x(t) = \Psi^\dagger(x,t)c\alpha^x\Psi(x,t)$. Geben Sie die Frequenz der zeitlichen Oszillation an.

(b) (2 Punkte) Die Zeitentwicklung eines Operators O im HEISENBERGbild wird durch die Gleichung $i\hbar \mathrm{d}O(t)/\mathrm{d}t = [O(t), H]$ bestimmt. Berechnen Sie $\mathrm{d}\vec{p}(t)/\mathrm{d}t$ und $\vec{v}(t) \equiv \mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t$ im HEISENBERGbild, wobei $\vec{p}$ und $\vec{r}$ der Impuls- und der Ortsoperator sind.

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Zweite Quantisierung:

Es seien im folgenden a_i Vernichtungsoperatoren und $a_i^\dagger$ Erzeugungsoperatoren im Formalismus der zweiten Quantisierung.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie für nichtwechselwirkende Bosonen, die durch den HAMILTON-operator $H = \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i$ beschrieben werden, die Bewegungsgleichungen für die Erzeuger und Vernichter in der HEISENBERG-Darstellung, $a_i(t) = e^{iHt/\hbar} a_i e^{-iHt/\hbar}$, $a_i^\dagger(t) = [a_i(t)]^\dagger$, und geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung an. [Hinweis: $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$].

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie am Beispiel von Fermionen, dass der Teilchenzahloperator $\hat{N} = \sum_i a_i^\dagger a_i$ mit dem HAMILTONoperator $H = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{2}\sum_{ijkl} v_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_l a_k$ vertauscht. [Hinweis: Verwenden Sie die Antivertauschungsrelationen für die $a_i^\dagger$ und a_i.]