

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK E NACHKLAUSUR

Prof. Dr. G. Schön und Priv.Do. Dr. M. Eschrig

Wintersemester 2008/2009

Aufgabe 1

4 Punkte

(a)

$$|+,+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |+,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-,+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-,-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und

$$H = (J_x \sigma_{x,1} \sigma_{x,2} + J_y \sigma_{y,1} \sigma_{y,2} + J_z \sigma_{z,1} \sigma_{z,2}). \quad (2)$$

Wir verwenden

$$\sigma_{x,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{x,1} \sigma_{x,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\sigma_{y,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{y,2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{y,1} \sigma_{y,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\sigma_{z,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{z,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{z,1} \sigma_{z,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Bis hierher gibt es

1 Punkt

Wir erhalten

$$H = \begin{pmatrix} J_z & 0 & 0 & J_x - J_y \\ 0 & -J_z & J_x + J_y & 0 \\ 0 & J_x + J_y & -J_z & 0 \\ J_x - J_y & 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad (1 \text{ Punkt})$$

(b)

Die Matrix H faktorisiert in zwei 2x2 Untermatrizen, und die Eigenwerte ergeben sich direkt durch die Bedingungen $(J_z - E)^2 = (J_x - J_y)^2$ und $(J_z + E)^2 = (J_x + J_y)^2$. Die Eigenwerte sind

$$E_{1,2} = \pm(J_x + J_y) - J_z, \quad E_{3,4} = \pm(J_x - J_y) + J_z \quad (2 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 2

9 Punkte

(a)

Wir haben

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ -\tau & \varepsilon & -\tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

mit den Eigenwerten und Eigenvektoren

$$E_+ = (\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2})/2, \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\tau^2 + E_+^2}} \begin{pmatrix} \tau \\ -E_+ \\ \tau \end{pmatrix} \quad \text{1 Punkt}$$

$$0, \quad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{1 Punkt}$$

$$E_- = (\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2})/2, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\tau^2 + E_-^2}} \begin{pmatrix} \tau \\ -E_- \\ \tau \end{pmatrix} \quad \text{1 Punkt}$$

(Eigenvektoren bis auf Phasenfaktoren).

(b)

Wir verwenden durchgängig zur Vereinfachung

$$E_+ - E_- = \sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}, \quad E_+ E_- = -2\tau^2, \quad 2\tau^2 + E_{\pm}^2 = \pm E_{\pm}(E_+ - E_-). \quad (7)$$

Durch die Messung zur Zeit $t = 0$ von $D = 0$ wird das Elektron in den Eigenzustand $|\Phi_B\rangle$ von D ,

$$|\Phi_B\rangle = \frac{1}{E_+ - E_-} \left(\sqrt{2\tau^2 + E_-^2} |-\rangle - \sqrt{2\tau^2 + E_+^2} |+\rangle \right) = \frac{\sqrt{-E_-} |-\rangle - \sqrt{E_+} |+\rangle}{\sqrt{E_+ - E_-}} \quad \text{1 Punkt}$$

gebracht, von wo es sich weiterentwickelt. Zu späteren Zeiten ist die Lösung $|\Psi(t)\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar}\varepsilon t}}{\sqrt{E_+ - E_-}} \left(\sqrt{-E_-} |-\rangle e^{\frac{i}{2\hbar}(E_+ - E_-)t} - \sqrt{E_+} |+\rangle e^{-\frac{i}{2\hbar}(E_+ - E_-)t} \right) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar}\varepsilon t}}{E_+ - E_-} \left\{ \left(\tau |\Phi_A\rangle - E_- |\Phi_B\rangle + \tau |\Phi_C\rangle \right) e^{\frac{i}{2\hbar}(E_+ - E_-)t} - \left(\tau |\Phi_A\rangle - E_+ |\Phi_B\rangle + \tau |\Phi_C\rangle \right) e^{-\frac{i}{2\hbar}(E_+ - E_-)t} \right\} \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{2\hbar}\varepsilon t}}{E_+ - E_-} \left(2i\tau |\Phi_A\rangle \sin((E_+ - E_-)t/2\hbar) - i\varepsilon |\Phi_B\rangle \sin((E_+ - E_-)t/2\hbar) \right. \\ &\quad \left. + (E_+ - E_-) |\Phi_B\rangle \cos((E_+ - E_-)t/2\hbar) + 2i\tau |\Phi_C\rangle \sin((E_+ - E_-)t/2\hbar) \right) \quad (9) \end{aligned}$$

Es können also folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten gemessen werden:

$$D = -d \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad \frac{4\tau^2}{\varepsilon^2 + 8\tau^2} \sin^2(\sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}t/2\hbar) \quad \text{1 Punkt}$$

$$D = 0 \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad \cos^2(\sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}t/2\hbar) + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 8\tau^2} \sin^2(\sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}t/2\hbar) \quad \text{1 Punkt}$$

$$D = d \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad \frac{4\tau^2}{\varepsilon^2 + 8\tau^2} \sin^2(\sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}t/2\hbar). \quad \text{1 Punkt}$$

(c)

Es ist

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau' \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau' & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Die Korrekturen zu den Eigenwerten ergeben sich aus

$$\delta E_{\pm} = \langle \pm | W' | \pm \rangle = -\frac{1}{E_+ - E_-} \left(\frac{2}{\pm E_{\pm}} \right) \tau^2 \tau' = -\frac{|E_{\mp}|}{2\tau^2 \sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}} \tau' = -\frac{|\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}|}{4\tau^2 \sqrt{\varepsilon^2 + 8\tau^2}} \tau' \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

und

$$\delta E_0 = \langle 0 | W' | 0 \rangle = \tau' \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Aufgabe 3

6 Punkte

(a)

Wir starten mit dem Zustand

$$|2, 2\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (11)$$

und wenden darauf J_- an:

$$J_- |2, 2\rangle = 2\hbar |2, 1\rangle = \sqrt{3}\hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (12)$$

oder

$$|2, 1\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad \boxed{2 \text{ Punkte}}$$

(b)

Wir wenden wieder J_- an,

$$J_- |2, 1\rangle = \sqrt{6}\hbar |2, 0\rangle = \sqrt{3}\hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}\hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{3}\hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (13)$$

oder

$$|2, 0\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2}\hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}\hbar \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad \boxed{2 \text{ Punkte}}$$

(c)

Als nächstes brauchen wir den Eigenvektor $|1, 1\rangle$, der zu $|2, 1\rangle$ orthogonal sein muss. Wir schreiben

$$|1, 1\rangle = \alpha \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \beta \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad (14)$$

und fordern

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\beta = 0 \quad (15)$$

was mit $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{3} = 1$ auf

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \boxed{2 \text{ Punkte}}$$

führt (bis auf ein Gesamtvorzeichen, das noch beliebig gewählt werden kann).

Aufgabe 4

5 Punkte

(a)

Wir haben

$$\Psi(x, 0) = A \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{cp}{E+mc^2} \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \frac{-E-mc^2}{-E-mc^2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{\frac{2mc^2}{E+mc^2}}} \quad (16)$$

und somit ist die Bedingung des Verschwindens der vierten Komponente

$$\rho = \frac{cp}{E+mc^2}$$

1 Punkt

Damit ergibt sich

$$\Psi(x, t) = A \begin{pmatrix} (E+mc^2)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} + \frac{c^2p^2}{E+mc^2}e^{\frac{i}{\hbar}Et} \\ 0 \\ 0 \\ cp(e^{-\frac{i}{\hbar}Et} - e^{\frac{i}{\hbar}Et}) \end{pmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\sqrt{2mc^2}\sqrt{E+mc^2}} \quad (17)$$

Mit

$$\alpha^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

erhalten wir für die Stromdichte

$$j_x(t) = \Psi^\dagger(x, t) c \alpha^x \Psi(x, t) = \frac{|A|^2}{2mc(E+mc^2)} 2\text{Re} \left[\left((E+mc^2)e^{\frac{i}{\hbar}Et} + \frac{c^2p^2}{E+mc^2}e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \right) \left(cp(e^{-\frac{i}{\hbar}Et} - e^{\frac{i}{\hbar}Et}) \right) \right] \quad (19)$$

was wir ausmultiplizieren können zu

$$j_x(t) = \frac{|A|^2}{mc} \left[cp \left(1 - \frac{c^2p^2}{(E+mc^2)^2} \right) - cp \left(1 - \frac{c^2p^2}{(E+mc^2)^2} \right) \cos(2Et/\hbar) \right] \quad (20)$$

und zusammengefasst

$$j_x(t) = |A|^2 \frac{p}{m} \cdot \left(1 - \frac{c^2p^2}{(E+mc^2)^2} \right) \cdot 2 \sin^2(Et/\hbar), \quad (21)$$

2 Punkte

wobei $\omega = E/\hbar$ die Frequenz ist.

(b)

$$i\hbar \frac{d\vec{p}}{dt} = [\vec{p}(t), H] \quad (22)$$

$$i\hbar \frac{dp_j}{dt} = [p_j, c\alpha^i p_i] = c\alpha^i [p_j, p_i] = 0, \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (23)$$

1 Punkt

$$i\hbar \frac{d\vec{r}}{dt} = [\vec{r}(t), H] \quad (24)$$

$$i\hbar \frac{dx_j}{dt} = [x_j, c\alpha^i p_i] = c\alpha^i [x_j, p_i] = c\alpha^i i\hbar \delta_{ij} = i\hbar c\alpha^j \quad (25)$$

und somit

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = c\vec{\alpha}$$

1 Punkt