

Aufgabe K1: Identische Teilchen

Wir betrachten ein ideales Gas mit N identischen Teilchen in einem Behälter. Die Teilchen wechselwirken nicht miteinander. Die möglichen Energien E_n ($n \in \mathbb{N}_0$; $E_{n+1} > E_n$) für ein Teilchen seien diskret und nicht entartet. Die zugehörigen Einteilchenzustände nennen wir $|n\rangle$.

- a) Was sind die möglichen Energieeigenzustände und -werte für das gesamte N -Teilchen-System, ausgedrückt durch die entsprechenden Einteilchenzustände und -energien? Unterscheiden Sie jeweils zwischen Bosonen und Fermionen. 2 Punkte
- b) Was sind der Grundzustand und die Grundzustandsenergie? Unterscheiden Sie jeweils zwischen Bosonen und Fermionen. 2 Punkte

Aufgabe K2: Spinmessung

Zwei unterscheidbare Spin-1/2-Teilchen befinden sich im Spin-Singlett-Zustand

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z+\rangle \otimes |z-\rangle - |z-\rangle \otimes |z+\rangle)$$

(d.h. ihr Gesamtdrehimpuls ist null; wir betrachten keine Ortswellenfunktionen). Hierbei sind $|z+\rangle$, $|z-\rangle$ Eigenzustände des Spinoperators in z -Richtung zu den Eigenwerten $+\hbar/2$, $-\hbar/2$.

- a) \vec{a} sei ein Einheitsvektor in der xz -Ebene,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenzustände des Spinoperators in Richtung \vec{a} zu den Eigenwerten $+\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ lauten (dies brauchen Sie nicht zu zeigen):

$$\begin{aligned} |a+\rangle &= \cos \frac{\alpha}{2} |z+\rangle + \sin \frac{\alpha}{2} |z-\rangle, \\ |a-\rangle &= -\sin \frac{\alpha}{2} |z+\rangle + \cos \frac{\alpha}{2} |z-\rangle. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß der oben angegebene Zustand $|S\rangle$ auch so geschrieben werden kann: 1 Punkt

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a+\rangle \otimes |a-\rangle - |a-\rangle \otimes |a+\rangle).$$

- b) Unser System aus zwei unterscheidbaren Teilchen befindet sich im oben angegebenen Spin-Singlett-Zustand $|S\rangle$. Wir führen eine Messung des Spins von Teilchen 1 in Richtung \vec{a} durch, wobei \vec{a} wie in Teilaufgabe a) definiert ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert die Messung den Wert $+\hbar/2$? Was ist der Zustand nach der Messung, falls der Wert $+\hbar/2$ für Teilchen 1 gemessen wurde? 2 Punkte
- c) Wir nehmen an, die Messung aus Teilaufgabe b) habe das Ergebnis $+\hbar/2$ geliefert. Unmittelbar anschließend messen wir den Spin von Teilchen 2 in Richtung \vec{b} , wobei

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man den Meßwert $+\hbar/2$?

In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung, falls der Wert $+\hbar/2$ für Teilchen 2 gemessen wurde? 2 Punkte

Hinweis: $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

Aufgabe K3: Dirac-Gleichung

- a) Gegeben seien die folgenden Dirac-Matrizen (chirale Darstellung):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ^k die Paulimatrizen sind:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie explizit die Matrix $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ sowie die Matrizen

1 Punkt

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5).$$

- b) Berechnen Sie mit den Matrizen aus der vorigen Teilaufgabe folgende Produkte:

$$P_L^2, \quad P_R^2, \quad P_L P_R, \quad P_R P_L$$

und drücken Sie Ihre Ergebnisse wieder durch P_L, P_R aus.

1 Punkt

Hinweis: Sollten Sie die vorige Teilaufgabe nicht gelöst haben, können Sie auch mit den (Anti-)Vertauschungsregeln der γ -Matrizen arbeiten.

- c) Der links- bzw. rechtshändige Anteil (sog. Weyl-Spinoren) eines Dirac-Spinors ψ ist definiert durch

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi.$$

$\psi(x)$ sei eine Lösung der freien Diracgleichung. Zeigen Sie, daß $\psi_L(x)$ und $\psi_R(x)$ ebenfalls Lösungen der Diracgleichung sind, falls die Masse m verschwindet.

1 Punkt

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$.

- d) Die infinitesimale Lorentztransformation eines Diracspinors lautet

$$\delta\psi(x) = \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \psi(x),$$

wobei $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ die infinitesimalen Transformationsparameter sind und

$$\Sigma^{\mu\nu} := \frac{1}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Die Lorentztransformation eines linkshändigen Weylspinors definieren wir analog,

$$\delta\psi_L = \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \psi_L.$$

Zeigen Sie, daß diese Definition mit der Lorentztransformation von ψ verträglich ist, daß für $\psi_L = P_L \psi$ also gilt:

2 Punkte

$$\delta\psi_L = P_L \delta\psi.$$

- e) Ist die Darstellung der Lorentzalgebra im Raum der Diracspinoren irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1 Punkt

Hinweis: Eine Darstellung auf einem Raum V heißt irreduzibel, wenn es außer $\{0\}$ und dem ganzen Raum V keine invarianten Unterräume gibt.

Aufgabe K4: Zeitabhängige Störungstheorie

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator befinde sich im Grundzustand $|0\rangle$. Zur Zeit $t = 0$ wird eine konstante Kraft F angelegt. Der Hamiltonoperator lautet also

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + H_1(t), \\ H_0 &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \\ H_1(t) &= \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -Fx & (t \geq 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Hierbei sind a^\dagger , a die Auf- und Absteigeoperatoren, definiert durch

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{m\hbar\omega/2} (a - a^\dagger).$$

Die normierten Energieeigenzustände bezeichnen wir mit $|n\rangle$, es gilt $H_0 |n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) |n\rangle$.

Für die Auf- und Absteigeoperatoren gelten die Beziehungen:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle.$$

- a) Der Oszillator soll sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand befinden. Berechnen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit dafür, das System zur Zeit $t > 0$ im angeregten Zustand $|n\rangle$ ($n \geq 1$) zu finden.

3 Punkte

- b) Wie in Teilaufgabe a) soll sich der Oszillator zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand befinden. Zeigen Sie, daß in der zweiten Ordnung Störungstheorie ein Übergang in den Zustand $|2\rangle$ möglich ist, nicht aber in Zustände $|n\rangle$ mit $n = 1$ oder $n > 2$.

2 Punkte

Hinweis: Im Wechselwirkungsbild erfüllt der Zeitentwicklungsoperator $U^{(I)}(t, t_0)$ die Integralgleichung

$$U^{(I)}(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_1^{(I)}(t') U^{(I)}(t', t_0).$$

Dabei ist $H_1^{(I)}(t)$ der Störterm im Wechselwirkungsbild,

$$H_1^{(I)}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H_1(t) e^{-iH_0 t/\hbar}.$$

Die iterative Lösung der Integralgleichung führt auf die Störungsreihe. Im Schrödingerbild lautet der Zeitentwicklungsoperator $U^{(S)}(t, t_0)$ so:

$$U^{(S)}(t, t_0) = e^{-iH_0 t/\hbar} U^{(I)}(t, t_0) e^{iH_0 t_0/\hbar}.$$

Es empfiehlt sich, $t_0 = 0$ zu setzen.