Aufgabe N1: *Zwei Elektronen im Kasten*

Wir betrachten zwei Elektronen (identische Spin 1/2-Teilchen), die sich nur auf einer Linie der Länge L bewegen können (Die Elektronen befinden sich also effektiv in einem eindimensionalen Kasten mit unendlich hohen Wänden). Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigen wir.

a) Bestimmen Sie zunächst die Energieeigenwerte sowie die zugehörigen Wellenfunktionen für ein einzelnes spinloses Teilchen in einem eindimensionalen Kasten der Länge L mit unendlich hohen Wänden. 1 Punkt

b) Bestimmen Sie nun für das oben beschriebene System mit zwei Elektronen die Grundzustandsenergie sowie sämtliche zu dieser Energie gehörigen Energieeigenzustände. 2 Punkte

c) Bestimmen Sie außerdem für das oben beschriebene System mit zwei Elektronen die erste angeregte Energie sowie sämtliche zu dieser Energie gehörigen Energieeigenzustände. 2 Punkte

Aufgabe N2: *Spinaustauschoperator*

Wir betrachten ein System von zwei Spin 1/2-Teilchen mit dem Zustandsraum

$$V = V^{(1/2)} \otimes V^{(1/2)} .$$

$V^{(1/2)}$ ist der zweidimensionale Zustandsraum eines Spin 1/2-Teilchens. $\vec{S}$ sei der Spinoperator auf $V^{(1/2)}$. Weiter definieren wir $\vec{S}^{(1)} := \vec{S} \otimes \mathbf{1}$, $\vec{S}^{(2)} := \mathbf{1} \otimes \vec{S}$.

Zeigen Sie, daß der Operator

$$A := \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \frac{4}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} \right)$$

die Spinwerte der beiden Teilchen vertauscht, daß also gilt:

$$A \,|m\,, n\rangle = |n\,, m\rangle \,, \qquad \text{wobei } m, n = \pm\tfrac{1}{2} \,.$$

Hierbei bezeichnen die $|m, n\rangle$ gemeinsame Eigenzustände zu $S_3^{(1)}$ und $S_3^{(2)}$ mit den Eigenwerten $m\,\hbar$ bzw. $n\,\hbar$.

Die Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden:

1) Sie können unter Verwendung der Spinmatrizen in der S_3-Eigenbasis,

$$S_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad S_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} , \qquad S_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

die Wirkung von A auf $|m, n\rangle$ für alle Kombinationen von m, n direkt ausrechnen. Methode 1: 2 Punkte

2) Alternativ können Sie ohne direkte Verwendung der Paulimatrizen Singlett- und Triplett-Zustände betrachten. Denken Sie in diesem Fall an die erste binomische Formel. Methode 2: 4 Punkte

Sollten Sie beide Lösungswege versuchen, können Sie insgesamt maximal 4 Punkte erhalten.

Aufgabe N3: *Relativistische Wellengleichungen*

a) Zeigen Sie, daß für Funktionen $\phi(x)$, die die Klein–Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

erfüllen, der Viererstrom

$$j^\mu := \phi^* \partial^\mu \phi - \phi\, \partial^\mu \phi^*$$

erhalten ist, d.h. $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt. 1 Punkt

b) Zeigen Sie, daß jede Lösung $\psi(x)$ der Diracgleichung

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$$

auch die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)\psi(x) = 0$$

erfüllt. 1,5 Punkte

Hinweis: Multiplizieren Sie die Diracgleichung mit einem geeigneten Differentialoperator.

c) Ein hypothetisches massives Photon (Masse m) würde man durch die sog. Procagleichung beschreiben:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0\,,$$

wobei $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.
Zeigen Sie, daß jede Lösung $A^\mu(x)$ der Procagleichung auch die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2)A^\mu(x) = 0$$

erfüllt. 1,5 Punkte

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Divergenz der Procagleichung.

d) Unter Raumspiegelung geht ein Diracspinor $\psi(t,\vec{x})$ über in $\psi'(t,\vec{x}) = \gamma^0\psi(t,-\vec{x})$.
Zeigen Sie: Ist $\psi(t,\vec{x})$ eine Lösung der freien Diracgleichung, so genügt auch $\psi'(t,\vec{x})$ der freien Diracgleichung. 2 Punkte

Aufgabe N4: *Streuung am kugelsymmetrischen Potentialtopf*

a) Wir betrachten die S-Wellenstreuung (Drehimpuls $l = 0$) an einem kugelsymmetrischen Potentialtopf mit

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 < 0 & (0 < r < R) \\ 0 & (r \geq R) \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die Streuphase δ.

Entwickeln Sie δ zur ersten Ordnung in der radialen Wellenzahl k.

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt für $k = 0$ und entwickeln Sie diesen zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in der Potentialstärke V_0. 3 Punkte

Hinweise:
Suchen Sie zunächst die physikalischen Lösungen der radialen Schrödingergleichung. Das asymptotische Verhalten dieser Lösungen ist $u(r) \sim \sin(kr + \delta)$, wobei δ die gesuchte Streuphase ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma(\Omega) = \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \sin\delta}{k} \right|^2 .$$

Die Reihenentwicklung der tan- und arctan-Funktionen lautet:

$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \ldots , \qquad \arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots .$$

b) Berechnen Sie in nun erster Bornscher Näherung die Streuamplitude für das in Teilaufgabe a) angegebene Potential $V(r)$.

Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Limes $k \to 0$. 2 Punkte

Hinweise:
Für rotationssymmetrische Potentiale ist die Streuamplitude in erster Bornscher Näherung gegeben durch

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2\, k \sin(\theta/2)} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r \sin\Big(2k\, r \sin(\theta/2)\Big)\, V(r) .$$

Das Integral können Sie durch partielle Integration lösen.

Die Reihenentwicklung der sin- und cos-Funktionen lautet:

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + \ldots , \qquad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \ldots .$$