

Moderne Theoretische Physik 2 — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Lösung der Klausur Nr. 1, 14.2.2011

Aufgabe 1: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

[3 · 4 = 12]

Wir untersuchen den zweidimensionalen Oszillator

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + 2m\omega^2y^2.$$

- (a) Bestimmen Sie zu allen Zuständen der vier niedrigsten Energien die Energie und die Entartung. Geben Sie auch die Zustände in geeigneten Quantenzahlen an.

Das System wird durch den Operator

$$V = \delta\sqrt{2} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} \right)^{3/2} x^2 y$$

gestört. Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur $\Delta^{(i)}$ zu den ungestörten Energien

- (b) $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$,
 (c) $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$.

Lösung:

- (a) wegen $2m\omega^2y^2 = \frac{1}{2}m(2\omega)^2y^2$ haben wir zwei unabhängige Oszillatoren mit Frequenzen ω und 2ω und Energien $E_x = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2})$ und $E_y = 2\hbar\omega(n_y + \frac{1}{2})$. Also $E = E_x + E_y = \hbar\omega(n_x + 2n_y + \frac{3}{2})$. Mit Zuständen $|n_x n_y\rangle$ erhalten wir dann für die ersten vier Energien:

Energie	Zustände	Entartungsgrad
$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$	$ 00\rangle$	1
$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$	$ 10\rangle$	1
$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$	$ 20\rangle, 01\rangle$	2
$E = \frac{9}{2}\hbar\omega$	$ 30\rangle, 11\rangle$	2

- (b) Da die Zustände in der Besetzungszahldarstellung gegeben sind, drücken wir V mit Hilfe von

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a - a^\dagger).$$

durch Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren aus. Analog mit $(y, p_y) \rightarrow (b, b^\dagger)$, hier jedoch auch $\omega \rightarrow 2\omega$ in den Normierungsfaktoren berücksichtigen! Damit erhalten wir

$$V = \delta(a^2 + a^{\dagger 2} + 2n_x + 1)(b + b^\dagger).$$

Damit lautet die Korrektur erster Ordnung zum Grundzustand

$$\Delta_0^{(1)} = \langle 00 | V | 00 \rangle \propto \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \underbrace{\langle 0 | y | 0 \rangle}_{=0} = 0.$$

Für die erste nichtverschwindende Korrektur müssen wir also mindestens bis zur nächsten Ordnung gehen. Dazu benötigen wir alle möglichen Matrixelemente $\langle 00 | V | kl \rangle$. Wegen der Wirkung von $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ als Leiteroperatoren und deren Auftauchen in maximal zweiter bzw. erster Potenz in V , können nur $|kl\rangle = |01\rangle, |11\rangle, |21\rangle$ überhaupt einen Beitrag geben. Wir finden

$$\begin{aligned}\langle 00 | V | 01 \rangle &= \delta(2 \cdot 0 + 1)(\sqrt{1}) = \delta, \\ \langle 00 | V | 11 \rangle &= \delta(0)(\sqrt{1}) = 0, \\ \langle 00 | V | 21 \rangle &= \delta(\sqrt{2}\sqrt{1})(\sqrt{1}) = \delta\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned}\Delta_0^{(2)} &= \sum_{(kl) \neq (00)} \frac{|\langle kl | V | 00 \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_{(kl)}^{(0)}} = \frac{\delta^2}{(\frac{3}{2} - \frac{7}{2})\hbar\omega} + \frac{0}{(\frac{3}{2} - \frac{9}{2})\hbar\omega} + \frac{2\delta^2}{(\frac{3}{2} - \frac{11}{2})\hbar\omega} \\ &= -\frac{\delta^2}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} \right) = -\frac{\delta^2}{\hbar\omega}.\end{aligned}$$

In erster nichtverschwindender Korrektur lautet die Grundzustandsenergie

$$E_0^{(2)} = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{\delta^2}{\hbar\omega}.$$

- (c) Der Energieeigenwert $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ gehört zu den Zuständen $|20\rangle$ und $|01\rangle$, ist also 2-fach entartet. Zur Berechnung der Energiekorrektur durch V benötigen wir also die Matrixelemente von V im Unterraum dieser zwei Zustände.

$$\begin{aligned}\langle 01 | V | 01 \rangle &\propto \langle 0 | x^2 | 0 \rangle \underbrace{\langle 1 | y | 1 \rangle}_{=0} = 0, \\ \langle 20 | V | 20 \rangle &\propto \langle 2 | x^2 | 2 \rangle \underbrace{\langle 0 | y | 0 \rangle}_{=0} = 0, \\ \langle 01 | V | 20 \rangle &= \delta \langle 0 | a^2 | 2 \rangle \langle 1 | b^\dagger | 0 \rangle = \delta(\sqrt{2}\sqrt{1})(\sqrt{1}) = \delta\sqrt{2} \\ &= \langle 20 | V | 01 \rangle\end{aligned}$$

Damit lautet V in der Basis der zwei ungestörten, entarteten Zustände,

$$V = \delta\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \delta\sqrt{2}\sigma_x$$

Wegen $\sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind die Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt. Damit haben wir in erster nichtverschwindender Korrektur die folgenden Energien und Zustände:

$$\begin{aligned}E_A^{(1)} &= \frac{7}{2}\hbar\omega - \delta\sqrt{2} \quad \text{zu} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |20\rangle), \\ E_B^{(1)} &= \frac{7}{2}\hbar\omega + \delta\sqrt{2} \quad \text{zu} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |20\rangle).\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Relativistische Korrekturen**[6]**

Welche der relativistischen Korrekturen

$$H_{LS} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L},$$

$$H_r = -\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2,$$

$$H_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2} \vec{\nabla}^2 V(r),$$

des Wasserstoffatoms kann als Störoperator die ungestörten 2s und 2p Zustände vermischen? Wenn also

$$|E^{(1)}\rangle = \alpha |2s\rangle + \beta |2p\rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

wann kann $\alpha\beta \neq 0$ werden? Bitte begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig.

Lösung: Die Eigenzustände des ungestörten Wasserstoffatoms mit Hamiltonoperator $H_0 = H_{kin} + V(r)$ werden durch Zustände $|nlm\rangle$ klassifiziert, wobei l, m die Quantenzahlen zu $\vec{L}^2, L_z$ sind.

H_r hängt nur vom Impuls des Elektrons ab und lässt sich durch $H_0 - V(r)$ ausdrücken. Wegen der Radialsymmetrie vertauscht H_r also wiederum mit $\vec{L}^2, L_z$; ist also ebenso diagonal in $|nlm\rangle$ und vermischt daher die ungestörten 2s und 2p Zustände nicht. Für H_D gilt wegen der Radialsymmetrie das gleiche Argument.

Für H_{LS} sind $|nlm\rangle$ keine guten Quantenzahlen mehr, weil L_z nicht mit H_{LS} vertauscht. Daher wird er normalerweise in der Basis $|jls m_j\rangle$ diagonalisiert. Das betrifft aber eben nicht l , sondern nur m . Daher kann auch dieser Operator die Zustände nicht mischen. (Zugegeben, das war etwas zu suggestiv in eine andere Richtung formuliert, sorry).

Aufgabe 3: Dirac–Strom**[6 + 4 = 10]**

Wir untersuchen ein Dirac–Elektron in Ruhe ($S_z = +\hbar/2$), beschrieben durch den Spinor $\psi(x)$.

(a) Berechnen Sie die elektromagnetische Stromdichte

$$j^\mu = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

im Ruhesystem des Teilchens.

(b) Wie lautet der Strom im System, in dem sich das Teilchen mit dem Impuls $(E/c, p, 0, 0)$ in x -Richtung bewegt?

Lösung:

(a) Der Spinor eines Elektrons in Ruhe mit $S_z = +\hbar/2$ lautet $\psi(x) = \exp(-ip \cdot x/\hbar)w_1(p)$, mit $p = (mc, \vec{0})$. Damit ist

$$j^\mu = e\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\psi(x) = e(1, 0, 0, 0)\gamma^0\gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da in den räumlichen γ^i nur die Nebendiagonalen $\neq 0$ sind erhalten wir $((\gamma^0)^2 = 1$ nur in der nullten Komponente einen Beitrag, also $j^\mu = (e, \vec{0})$, wie erwartet.

- (b) Vom boost $(mc, 0, 0, 0) \rightarrow (E/c, p, 0, 0)$ lesen wir $\gamma = (E/c)/(mc) = E/(mc^2)$ ab, ebenso bekommen wir $\beta = -cp/E$. Damit ist

$$j^\mu = \frac{e}{mc}(E/c, p, 0, 0) = e \frac{p^\mu}{mc} = e\beta^\mu,$$

also Ladung $\times$ 4-Geschwindigkeit.

Alternative Lösung: gegebenen Impuls in $w_1(p)$ einsetzen und mit den expliziten Darstellungen der γ -Matrizen j^μ komponentenweise berechnen.

Aufgabe 4: Quadrupolübergänge

[6 + 2 + 4 = 12]

Elektromagnetische Quadrupolübergänge im Wasserstoffatom werden durch sphärische Tensoroperatoren $Q_m^{(2)}$ beschrieben.

- (a) Berechnen Sie das Verhältnis B/A der folgenden Matrixelemente zwischen Wasserstoffeigenzuständen $|nlm\rangle$,

$$A = \langle n' 4 3 | Q_2^{(2)} | n 2 1 \rangle,$$

$$B = \langle n' 4 - 2 | Q_0^{(2)} | n 2 - 2 \rangle.$$

Das Ergebnis ist eine Zahl.

- (b) Berechnen Sie

$$C = \langle n' 5 1 | Q_2^{(2)} | n 1 - 1 \rangle,$$

$$D = \langle n' 3 1 | Q_0^{(2)} | n 1 - 1 \rangle.$$

- (c) Wir betrachten das Matrixelement

$$\langle 4 l m | z(x + iy) | n 2 1 \rangle$$

mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Welche Werte sind für l, m erlaubt und warum?

Lösung:

- (a) Da es sich bei $Q_m^{(2)}$ um sphärische Tensoroperatoren handelt, können wir A und B nach dem Wigner-Eckart-Theorem in ein Produkt aus Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGK) und reduziertem Matrixelement zerlegen. Das reduzierte Matrixelement ist bei beiden gleich, so dass im Verhältnis nur noch ein Verhältnis von CGKs bleibt,

$$\frac{B}{A} = \frac{\langle 2 2; 0 - 2 | 4 - 2 \rangle}{\langle 2 2; 2 1 | 4 3 \rangle}.$$

Für die Kopplung $2 \otimes 2 = 4$ müssen wir die gesuchten CGKs berechnen. Der Zustand maximalen Gewichts ist $|44\rangle = |22\rangle |22\rangle$. Wegen der Phasenbeziehung

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | J M \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1 j_2; -m_1 -m_2 | J -M \rangle$$

müssen wir den Absteigeoperator J_- nur zweimal anwenden. Wir berechnen

$$J_-/\hbar |44\rangle = \sqrt{4(4+1) - 4(4-1)} |43\rangle = 2\sqrt{2} |43\rangle,$$

$$J_-/\hbar |43\rangle = \sqrt{20 - 6} |42\rangle = \sqrt{14} |42\rangle.$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
 J_-/\hbar |22\rangle |22\rangle &= \sqrt{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} (|21\rangle |22\rangle + |22\rangle |21\rangle) \\
 &= 2(|21\rangle |22\rangle + |22\rangle |21\rangle), \\
 (J_-/\hbar)^2 |22\rangle |22\rangle /2 &= \sqrt{6-0} (|20\rangle |22\rangle + |22\rangle |20\rangle) + 2(|21\rangle |21\rangle + |21\rangle |21\rangle) \\
 &= \sqrt{6}|20\rangle |22\rangle + \sqrt{6}|22\rangle |20\rangle + 4|21\rangle |21\rangle.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |43\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|21\rangle |22\rangle + |22\rangle |21\rangle), \\
 |42\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{7}} (\sqrt{6}|20\rangle |22\rangle + \sqrt{6}|22\rangle |20\rangle + 4|21\rangle |21\rangle).
 \end{aligned}$$

Da $(-1)^{2+2-4} = +1$, können wir von den unterstrichenen Zuständen die gesuchten CGKs ablesen und erhalten das gesuchte Resultat

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

- (b) In beiden Fällen verschwindet der CGK, so dass nach dem Wigner-Eckart Theorem beide Matrixelemente = 0 sind. $C = 0$, weil $(j_1 = 2) \otimes (j_2 = 1)$ nicht zu $J = 5$ koppeln kann. Ebenso gilt $D = 0$, weil $m_1 + m_2 = 0 + 1 \neq 2 = M$.
- (c) Der Operator $z(x + iy)$ lässt sich durch die Kugelfunktion Y_2^1 ausdrücken, weil

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} r \cos \theta (r \sin \theta \cos \phi + ir \sin \theta \sin \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{r^2} z(x + iy).$$

Damit handelt es sich um einen sphärischen Tensoroperator vom Rang 2. Dementsprechend wäre aus der Kopplung $2 \otimes 2$ möglich: $l = 2 - 2, \dots, 2 + 2 = 0, 1, 2, 3, 4$. Wegen $m = 2$ ist $l = 0, 1$ jedoch nicht möglich. Wegen $n = 4$ und $l < n$ beim Wasserstoffatom entfällt auch $l = 4$. Schliesslich verletzt $l = 3$ die Paritätserhaltung. Damit bleibt für den gesuchten Zustand nur $|422\rangle$.