1. Klausur zur Vorlesung Theoretische Physik E: Quantenmechanik II
Universität Karlsruhe WS 2011/12

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Michael Marthaler

[Hinweis: Bitte halten Sie ihren Studentenausweis bereit. Als Hilfsmittel ist eine handbeschriebene A4-Seite (beidseitig beschrieben) zugelassen. Die Ausgabe der Klausuren erfolgt am 20. Dezember in den Übungen. Die Gesamtzahl der Punkte ist 25.]

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Messung

Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen im Magnetfeld,

$$H = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z \,. \tag{1}$$

Die Eigenzustände des Spin-1/2 Teilchen sind gegeben durch $|+\rangle$ und $|-\rangle$, mit $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle \,, \tag{2}$$

präpariert, wobei α und β reelle Zahlen sind und $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

(a) (2 Punkte) Wir messen die Observable σ_x zum Zeitpunkt $t_1 > 0$. Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit?

(b) (1 Punkt) Nehmen sie an, dass der Spin bei der Messung zur Zeit $t = t_1$ in einen Eigenzustand von σ_x projiziert wurde mit dem Eigenwert $+1$. Zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ messen wir die Observable σ_y. Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit?

(c) (1 Punkt) Nehmen sie an, dass der Spin bei der Messung bei $t = t_1$ in einen Eigenzustand von σ_x projiziert wurde mit dem Eigenwert -1. Zum Zeitpunkt $t_2 > t_1$ messen wir die Observable σ_y. Welche Werte ergeben sich mit welcher Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Eigenschaften des Triplett-Zustandes:

Der Spin-Triplett-Zustand mit $m = 0$,

$$|T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,-\rangle + |-,+\rangle\right) \,, \tag{3}$$

ist nicht rotationsinvariant unter der unitären Transformation $U \otimes U$, mit der allgemeinen Drehmatrix, $U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$, $|\vec{n}|^2 = 1$.

(a) (1 Punkt) Schreiben sie die oben gegebene Drehmatrix in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

und bestimmen sie a und b.

(b) (3 Punkte) Zeigen sie dann, dass sich der transformierte Triplett-Zustand schreiben lässt als,

$$(U \otimes U)|T_0\rangle = \alpha|T_0\rangle + \beta|T_1\rangle + \gamma|T_{-1}\rangle \tag{5}$$

mit $|T_1\rangle = |++\rangle$ und $|T_{-1}\rangle = |--\rangle$. Berechnen sie α, β und γ explizit als Funktion von a, a^*, b und b^*.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Unschärferelation für Spins:
Betrachten Sie einen Spinzustand in der Parametrisierung:

$$|\Psi\rangle = \exp(i\frac{\alpha}{2})\left[\cos(\frac{\theta}{2})\exp(-i\frac{\phi}{2})\,|+\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})\exp(i\frac{\phi}{2})\,|-\rangle\right]\,, \tag{6}$$

und wir definieren, $\Delta\sigma_i = \sqrt{\langle\sigma_i^2\rangle - \langle\sigma_i\rangle^2}$, $i = \{x, y, z\}$.
(Hinweis: $2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin x$, $\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos(x)$.)

(a) (1 Punkt) Berechnen sie $\Delta\sigma_x$.

(b) (1 Punkt) Berechnen sie $\Delta\sigma_y$.

(c) (1 Punkt) Berechnen sie $\Delta\sigma_z$.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie explizit, dass die Unschärferelation erfüllt ist:

$$\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_y \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\sigma_x, \sigma_y]\rangle\right|\,. \tag{7}$$

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Rabi-Oszillationen:
Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen in einem statischen Feld $B_0\vec{e}_z$ und einem zusätzlichen Wechselfeld, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H(t) \quad = \quad -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R^{(0)}\left[\sigma_x\cos(\omega t + \phi) - \sigma_y\sin(\omega t + \phi)\right]\,,$$

wobei wir annehmen, dass $\omega = \omega_0$. Wir definieren die Eigenzustände des Operators σ_z als $|+\rangle$ und $|-\rangle$, mit $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$.

(a) (2 Punkte) Transformieren sie die Schrödinger Gleichung mit der unitären Transformation $|\psi\rangle = U(t)|\psi'\rangle$, mit $U(t) = e^{i\omega\sigma_z t/2}$. Hierbei ist $|\psi\rangle$ die Wellenfunktion im stationären und $|\psi'\rangle$ die Wellenfunktion im rotierenden Bezugssytem. Die Relation $U^\dagger(t)\sigma_\pm U(t) = \sigma_\pm e^{\mp i\omega t}$ kann direkt verwendet werden. Finden sie den nun zeitunabhängigen Hamilton-Operator, der die Zeitentwicklung des Teilchens in dem rotierenden Bezugssytem beschreibt.

(b) (2 Punkte) Das Spin-1/2 Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle\,. \tag{8}$$

Berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi'\rangle = U^\dagger(t)|\psi\rangle$. D.h. berechnen sie die Zeitentwicklung des Zustandes im rotierenden Bezugssystem.

(c) ($\frac{1}{2}$ Punkt) Berechnen sie eine explizite Form für $\sigma_x(t) = U^\dagger(t)\sigma_x U(t)$.

(d) ($\frac{1}{2}$ Punkt) Berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\psi\rangle$ im stationären Bezugssystem, für den Anfangszustand (8).

(e) (1 Punkt) Berechnen sie $\langle\sigma_x\rangle$ für den Zustand $|\psi(t)\rangle$ aus Aufgabenteil (d).

Aufgabe 5 **(6 Punkte)**

Geladener harmonischer Oszillator:
Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator sei durch $H_0 = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2X^2$ charakterisiert. Das Teilchen sei zusätzlich geladen (Ladung q), und ein elektrisches Feld $E(t) = E_0e^{-i\omega_0 t}e^{\eta t}$ sei in x-Richtung angelegt, was zu einem weiteren Term im Hamilton-Operator von der Form $H_1(t) = -qE(t)X$ führt. Betrachten Sie $H_1(t)$ als Störung zum ungestörten Hamilton-Operator H_0.

(a) ($\frac{1}{2}$ Punkt) Schreiben Sie den Hamilton-Operator $H(t) = H_0 + H_1(t)$ des Teilchens unter Benutzung der Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a. Benutzen Sie dazu die Relation $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$.

(b) ($\frac{1}{2}$ Punkt) Transformieren sie $H_1(t)$ ins Wechselwirkungsbild bezüglich H_0. Sie können hier die Relationen $e^{i\omega t a^\dagger a}a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t}$, $e^{i\omega t a^\dagger a}ae^{-i\omega t a^\dagger a} = ae^{-i\omega t}$ direkt verwenden.

(c) (4 Punkte) Berechnen sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie in $H_1(t)$ die Übergangsrate vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand des ungestörten Hamilton-Operators H_0. Wählen sie als untere Grenze ihres Integrals die Zeit $t_0 \to -\infty$.

(d) (1 Punkt) Wie sieht die im Aufgabenteil (c) berechnete Rate aus im Limes $\eta \to 0$?