Lösung Vorklausur

13.12.11

Aufgabe 1 $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

Teilaufgabe a) $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Der Zustand $|\psi\rangle$ ist zum Zeitpunkt t gegeben durch,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\omega_0 t/2}\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\omega_0 t/2}\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= e^{-i\omega_0 t/2}\beta|-\rangle + e^{i\omega_0 t/2}\alpha|+\rangle\,. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir Eigenwerte und Vektoren der Matrix σ_x die auch schon auf dem 2ten Übungsblatt berechnet wurden,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = -1\,. \tag{1}$$

Es ist nun einfach sich davon zu überzeugen das die Eigenvektoren gegeben sind durch,

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Damit ergibt sich,

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_1\rangle - |\lambda_2\rangle)\,, \tag{3}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\lambda_1\rangle + |\lambda_2\rangle)\,. \tag{4}$$

In den Eigenzuständen von σ_x lässt sich der Zustand $|\psi(t)\rangle$ schreiben als,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta e^{-i\omega_0 t/2}\left[|\lambda_1\rangle + |\lambda_2\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha e^{i\omega_0 t/2}\left[|\lambda_1\rangle - |\lambda_2\rangle\right] \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta e^{-i\omega_0 t/2} + \alpha e^{i\omega_0 t/2})|\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta e^{-i\omega_0 t/2} - \alpha e^{i\omega_0 t/2})|\lambda_2\rangle \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha+\beta)\cos(\omega_0 t/2) + i(\alpha-\beta)\sin(\omega_0 t/2)]|\lambda_1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}[(\beta-\alpha)\cos(\omega_0 t/2) - i(\alpha+\beta)\sin(\omega_0 t/2)]|\lambda_2\rangle\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir sehen,

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
1	$(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\cos\omega_0 t)/2$
-1	$(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\cos\omega_0 t)/2$

oder mit dem Hinweis $\alpha^2+\beta^2=1$,

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
1	$(1+\alpha\beta\cos\omega_0 t)/2$
-1	$(1-\alpha\beta\cos\omega_0 t)/2$

Teilaufgabe b) $\boxed{\text{1 Punkte}}$

Die Eigenzustände von σ_y sind gegeben durch,

$$
\begin{aligned}
|y_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|+\rangle + |-\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} && (8)\\
|y_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[i|+\rangle - |-\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} && (9)
\end{aligned}
$$

mit den Eigenwerten -1 und $+1$.

Wir wissen das der Spin im Zustand $|\lambda_1\rangle$ ist. Damit ergibt sich die Zeitentwicklung

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right],\\
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left[e^{-i\omega_0 t/2}(|y_-\rangle - |y_+\rangle) - ie^{i\omega_0 t/2}(|y_-\rangle + |y_+\rangle)\right].
\end{aligned}
$$

Wir sehen,

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
-1	$\lvert e^{-i\omega_0 t/2} - ie^{i\omega_0 t/2}\rvert^2/4 = (1+\sin\omega_0 t)/2$
1	$\lvert e^{-i\omega_0 t/2} + ie^{i\omega_0 t/2}\rvert^2/4 = (1-\sin\omega_0 t)/2$

Teilaufgabe c) $\boxed{\text{1 Punkte}}$

Wir wissen das der Spin im Zustand $|\lambda_1\rangle$ ist. Damit ergibt sich die Zeitentwicklung

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right],\\
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left[e^{-i\omega_0 t/2}(|y_-\rangle - |y_+\rangle) + ie^{i\omega_0 t/2}(|y_-\rangle + |y_+\rangle)\right].
\end{aligned}
$$

Eigenwert	Wahrscheinlichkeiten
-1	$\lvert e^{-i\omega_0 t/2} + ie^{i\omega_0 t/2}\rvert^2/4 = (1-\sin\omega_0 t)/2$
1	$\lvert e^{-i\omega_0 t/2} - ie^{i\omega_0 t/2}\rvert^2/4 = (1+\sin\omega_0 t)/2$

Aufgabe 2 $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

Teilaufgabe a) $\boxed{\textbf{1 Punkte}}$

$$U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}\ , \quad |\vec{n}|^2 = 1 \tag{10}$$

Dies kann umgeschrieben werden in die Form,

$$\begin{aligned} U &= \mathbf{1}\cos\frac{\alpha}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= \mathbf{1}\cos\frac{\alpha}{2} - in_z\sigma_z\sin\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\left(n_y\sigma_y + n_x\sigma_x\right) \qquad (11) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} - in_z\sin\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2}(n_x - in_y) \\ -i\sin\frac{\alpha}{2}(n_x + in_y) & \cos\frac{\alpha}{2} + in_z\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \qquad (12) \end{aligned}$$

Damit haben wir,

$$\begin{aligned} a &= \cos\frac{\alpha}{2} - in_z\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (13) \\ b &= -i\sin\frac{\alpha}{2}(n_x - in_y) \end{aligned}$$

Teilaufgabe b) $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

$$\begin{aligned} (U\otimes U)|T_0\rangle &= (U\otimes U)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle\right] \qquad (14) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(U|+\rangle)(U|-\rangle) + (U|-\rangle)(U|+\rangle)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a|+\rangle - b^*|-\rangle)(b|+\rangle + a^*|-\rangle) + (b|+\rangle + a^*|-\rangle)(a|+\rangle - b^*|-\rangle)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2ab|++\rangle - 2a^*b^*|--\rangle + (|a|^2 - |b|^2)(|+-\rangle + |-+\rangle)\right] \end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{2}ab \\ \gamma &= -\sqrt{2}a^*b^* \\ \alpha &= (|a|^2 - |b|^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 $\boxed{\textbf{5 Punkte}}$

Aufgabenteil a) $\boxed{\textbf{1 Punkte}}$

Wir berechnen zunächst den Erwartungswerte:

$$\langle \sigma_x \rangle \quad = \quad \sin(\theta)\cos(\phi)$$

und benutzen das $\sigma_x^2 = 1$:

$$(\Delta\sigma_x)^2 = 1 - \sin^2(\theta)\cos^2(\phi)$$

Aufgabenteil b) $\boxed{\textbf{1 Punkte}}$

Wir berechnen zunächst den Erwartungswerte:

$$\langle \sigma_y \rangle \quad = \quad \sin(\theta)\sin(\phi)$$

und benutzen das $\sigma_y^2 = 1$:

$$(\Delta\sigma_y)^2 = 1 - \sin^2(\theta)\sin^2(\phi)$$

Aufgabenteil c) $\boxed{\textbf{1 Punkte}}$

Wir berechnen zunächst den Erwartungswerte:

$$\langle \sigma_z \rangle \quad = \quad \cos(\theta)$$

und benutzen das $\sigma_z^2 = 1$: Damit erhalten wir

$$(\Delta\sigma_z)^2 = 1 - \cos^2(\theta)\,.$$

Aufgabenteil d) $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Somit wird

$$\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_y = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^4(\theta)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)}.$$

Für die rechte Seite verwenden wir $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$, was auf

$$\frac{1}{2}\,|\langle[\sigma_x, \sigma_y]\rangle| = |\langle\sigma_z\rangle| = |\cos(\theta)|$$

führt. Nun stellen wir fest,

$$\sin^4(\theta)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi) > 0\,. \tag{15}$$

Daraus folgt

$$\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_y = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^4(\theta)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)} \geq |\cos(\theta)| = \frac{1}{2}\,|\langle[\sigma_x, \sigma_y]\rangle|\,.$$

Aufgabe 4 $\boxed{\textbf{6 Punkte}}$

Teilaufgabe a) $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Die Zeitentwicklung des Teilchens wird beschrieben durch die Schrödingergleichung,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle &= H(t)|\psi\rangle \quad , \quad \text{mit} \qquad (16)\\ H(t) &= -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R^{(0)}\left[\sigma_x\cos(\omega t+\phi) - \sigma_y\sin(\omega t+\phi)\right] . \end{aligned}$$

Wir schreiben jetzt den Zeitabhängigen Teil des Hamilton-Operators um,

$$\begin{aligned} \sigma_x\cos(\omega t+\phi) - \sigma_y\sin(\omega t+\phi) &= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t+\phi) + i\sin(\omega t+\phi) \\ \cos(\omega t+\phi) - i\sin(\omega t+\phi) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left[\sigma_+ e^{i(\omega t+\phi)} + \sigma_- e^{-i(\omega t+\phi)}\right] \end{aligned}$$

Eine beliebige Zeitabhängige unitäre Transformation $U(t)$ ergibt die Schrödinger Gleichung,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \left[U^\dagger(t)H(t)U(t) - i\hbar U^\dagger\frac{\partial}{\partial t}U\right]|\psi'\rangle .$$

Ich wähle

$$U(t) = e^{i\omega\sigma_z t/2} . \qquad (17)$$

Und dann verwenden wir,

$$-i\hbar U^\dagger \dot{U} = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z .$$

Damit bekommen wir die Transformierte Schrödinger Gleichung mit,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = H'|\psi'\rangle \ , \ H' = \frac{\hbar}{2}\Omega_R^{(0)}\left[\sigma_+ e^{i\phi} + \sigma_- e^{-i\phi}\right] .$$

Für die Rechnung in Aufgabteil c) ist es nun sinnvoll den Hamilton-Operator in ein anderen Form zu schreiben,

$$H' = \frac{\hbar\Omega_R^{(0)}}{2}\left[\sigma_x\cos(\phi) - \sigma_y\sin(\phi)\right] . \qquad (18)$$

Teilaufgabe b) $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Das Spin-1/2 Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (19)$$

Wie oben definiert ist $|\psi(t)\rangle$ die Wellenfunktion im stationären Bezugssystem, aber es gilt,

$$|\psi(0)\rangle = U(0)|\psi'(0)\rangle = |\psi'(0)\rangle . \qquad (20)$$

D.h. der selbe Zustand ist dann auch Initialzustand im Rotierenden Bezugssystem.

Wir berechnen nun die Zeitentwicklung von $|\psi'(t)\rangle$ mit dem Hamilton-Operator $H'(t)$. Der Zeitentwicklungs-Operator ist gegeben durch,

$$\begin{aligned} U_R = \exp[-iH't/\hbar] &= \mathbf{1}\cos(\Omega_R^{(0)}t/2) - i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)(\sigma_x\cos\phi - \sigma_y\sin\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega_R^{(0)}t/2) & -i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{i\phi} \\ -i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{-i\phi} & \cos(\Omega_R^{(0)}t/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_R|\psi'(0)\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega_R^{(0)}t/2) & -i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{i\phi} \\ -i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{-i\phi} & \cos(\Omega_R^{(0)}t/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (21) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega_R^{(0)}t/2) \\ -i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{-i\phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabenteil c) $\boxed{\textbf{1/2 Punkte}}$

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= U^\dagger(t)\sigma_x U(t) = U^\dagger(t)(\sigma_+ + \sigma_-)U \qquad (22) \\ &= \sigma_+ e^{-i\omega t} + \sigma_- e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Aufgabenteil d) $\boxed{\textbf{1/2 Punkte}}$

Die Wellenfunktion kan geschrieben werden in der Form,

$$|\psi'(0)\rangle = \cos(\Omega_R^{(0)}t/2)|+\rangle - i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{-i\phi}|-\rangle \qquad (23)$$

Die Rücktransformation ist gegeben durch,

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi'(t)\rangle\,. \qquad (24)$$

Damit erhalten wir,

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{i\omega t/2}|+\rangle - i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{-i\phi}e^{-i\omega t/2}|-\rangle$$

Aufgabenteil e) $\boxed{\textbf{1 Punkte}}$

$$\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle &= \langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle = \langle\psi'(t)|U^\dagger(t)\sigma_x U(t)|\psi'(t)\rangle \qquad (25) \\ &= \langle\psi'(t)|\sigma_+|\psi'(t)\rangle e^{-i\omega t} + \langle\psi'(t)|\sigma_-|\psi'(t)\rangle e^{i\omega t} \qquad (26) \\ &= -i\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)\cos(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{-i\phi}e^{-i\omega t} + i\cos(\Omega_R^{(0)}t/2)\sin(\Omega_R^{(0)}t/2)e^{i\phi}e^{i\omega t} \\ &= -\frac{i}{2}\sin(\Omega_R^{(0)})(e^{-i\phi}e^{-i\omega t} - e^{i\phi}e^{i\omega t}) \\ &= -\sin(\Omega_R^{(0)}t)\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Aufgabe 5 $\boxed{\textbf{6 Punkte}}$

Aufgabenteil a) $\boxed{\textbf{1/2 Punkte}}$

Es ist einfach

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - qE(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right).$$

Hier kann man auch $n = a^\dagger a$ benutzen.

Aufgabenteil b) $\boxed{\textbf{1/2 Punkte}}$

Wir erhalten einfach

$$H_{1I}(t) = \hbar\Omega e^{-i\omega_0 t} e^{\eta t} e^{i\omega t a^\dagger a}(a^\dagger + a) e^{-i\omega t a^\dagger a} = \hbar\Omega e^{-i\omega_0 t} e^{\eta t}(a^\dagger e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}).$$

mit

$$\Omega = \frac{-qE_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \tag{27}$$

Aufgabenteil c) $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

Die Wahrscheinlichkeitsamlitude für einen Übergang vom Grund- zum Ersten angeregten Zustand, kan geschrieben werden als,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \langle e|H_{1I}(t')|g\rangle \qquad (28) \\ &= \Omega \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega_0 t'} e^{\eta t'} e^{i\omega t'} \\ &= \Omega \frac{e^{-i\omega_0 t} e^{\eta t} e^{i\omega t}}{\eta + i(\omega - \omega_0)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich,

$$|I|^2 = \Omega^2 \frac{e^{2\eta t}}{\eta^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

und

$$\Gamma_{g\to e} = \frac{d}{dt}|I|^2 = \Omega^2 \frac{2\eta e^{2\eta t}}{\eta^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Aufgabenteil d) $\boxed{\textbf{1 Punkt}}$

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{2\eta e^{2\eta t}}{\eta^2 + (\omega - \omega_0)^2} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{29}$$

Die Rate ist damit gegeben durch,

$$\Gamma_{g\to e} = 2\pi\Omega^2\delta(\omega - \omega_0).$$