Hauptklausur: Lösungen

$\boxed{1}$ Messung (2 Punkte)

Schreiben wir $\boldsymbol{a} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ haben wir für die Observable

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Mit den Eigenvektoren und Eigenwerten

$$\begin{aligned} +,\quad |\boldsymbol{a}_+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ -,\quad |\boldsymbol{a}_-\rangle &= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit den Eigenwert $+1$ zu Messen ist gegeben durch

$$P(\boldsymbol{a}_+) = |\langle +|\boldsymbol{a}_+\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{(1+\cos\theta)}{2} = \frac{(1+a_z)}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit den Eigenwert -1 zu Messen ist gegeben durch

$$P(\boldsymbol{a}_-) = |\langle +|\boldsymbol{a}_-\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{(1-\cos\theta)}{2} = \frac{(1-a_z)}{2}.$$

Alternative Darstellungen der Eigenvektoren: (äquivalent bis auf Phasenfaktoren)

$$|\boldsymbol{a}_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+a_z)}}\begin{pmatrix} (1+a_z) \\ a_x + ia_y \end{pmatrix} \Rightarrow |\langle +|\boldsymbol{a}_+\rangle|^2 = \frac{(1+a_z)^2}{2(1+a_z)} = \frac{(1+a_z)}{2}$$

$$|\boldsymbol{a}_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-a_z)}}\begin{pmatrix} (1-a_z) \\ -(a_x + ia_y) \end{pmatrix} \Rightarrow |\langle +|\boldsymbol{a}_-\rangle|^2 = \frac{(1-a_z)^2}{2(1-a_z)} = \frac{(1-a_z)}{2}$$

oder

$$|\boldsymbol{a}_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1-a_z)}}\begin{pmatrix} a_x - ia_y \\ (1-a_z) \end{pmatrix} \Rightarrow |\langle +|\boldsymbol{a}_+\rangle|^2 = \frac{(a_z^2+a_y^2)}{2(1-a_z)} = \frac{(1-a_z^2)}{2(1-a_z)} = \frac{(1-a_z)(1+a_z)}{2(1-a_z)} = \frac{(1+a_z)}{2}$$

$$|\boldsymbol{a}_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+a_z)}}\begin{pmatrix} a_x - ia_y \\ -(1+a_z) \end{pmatrix} \Rightarrow |\langle +|\boldsymbol{a}_-\rangle|^2 = \frac{(a_z^2+a_y^2)}{2(1+a_z)} = \frac{(1-a_z^2)}{2(1+a_z)} = \frac{(1-a_z)(1+a_z)}{2(1+a_z)} = \frac{(1-a_z)}{2}$$

$\boxed{2}$ Geladener Oszillator **(5 Punkte)**

Die Schrödinger-Gleichung ist gegeben durch

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = (H_0 + H_1(t))|\psi(t)\rangle \tag{3}$$

Steigen wir in das Wechselwirkungsbild mit $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\psi_I(t)\rangle$ haben wir

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0}\left(H_0|\psi_I(t)\rangle + i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle\right) &= (H_0 + H_1(t))e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\psi^I(t)\rangle \\ \Rightarrow i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle &= H_{1,I}(t)|\psi_I(t)\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $H_{1,I}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}H_1(t)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung im Wechselwirkungsbild ist gegeben durch

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H_{1,I}(t')}|\psi_I(t_0)\rangle \tag{5}$$

Nehmen wir $|\psi_I(t_0)\rangle = |0\rangle$ und entwickeln den Exponenten zu erster Ordnung in den Störterm H_1 haben wir

$$|\psi_I(t)\rangle = |0\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H_{1,I}(t')|0\rangle \tag{6}$$

(a) Benutzen wir $H_0 = \hbar\omega_0(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ und $H_1(t) = V_0(a^\dagger e^{-i\omega t} + ae^{i\omega t})e^{\eta t}$, nehmen $t_0 \to -\infty$ und projizieren den Zustand auf $|1\rangle$ um die Übergangsamplitude zwischen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ zu bekommen:

$$\begin{aligned} \langle 1|\psi_I(t)\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \langle 1|H_1^I(t')|0\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \langle 1|e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t'}H_1(t')e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t'}|0\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i\omega_0 t'}\langle 1|H_1(t')|0\rangle \\ &= \frac{V_0}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i\omega_0 t'}\langle 1|\left(a^\dagger e^{-i\omega t'} + ae^{i\omega t'}\right)|0\rangle e^{\eta t'} \\ &= \frac{V_0}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i(\omega-\omega_0+i\eta)t'} \\ &= \frac{V_0}{\hbar}\frac{e^{-i(\omega-\omega_0+i\eta)t}}{\omega-\omega_0+i\eta} \end{aligned} \tag{7}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\langle 1|a|0\rangle = 0$ und $\langle 1|a^\dagger|0\rangle = 1$.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dann

$$P_{0,1}(t) \equiv |\langle 1|\psi_I(t)\rangle|^2 = \left(\frac{V_0}{\hbar}\right)^2 \frac{e^{2\eta t}}{(\omega-\omega_0)^2+\eta^2} \tag{8}$$

Die Übergangsrate ist

$$\Gamma = \frac{dP_{0,1}}{dt} = \left(\frac{V_0}{\hbar}\right)^2 \frac{2\eta e^{2\eta t}}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} \tag{9}$$

(b) Bilden wir das Limes $\eta \to 0$ und benutzen $\lim_{\eta \to 0} \eta/(x^2 + \eta^2) = \pi\delta(x)$ haben wir

$$\Gamma = 2\pi \left(\frac{V_0}{\hbar}\right)^2 \delta(\omega - \omega_0) \tag{10}$$

$\boxed{3}$ Wechselwirkende Spins **(3 Punkte)**

Wir benutzen $\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{S}_1^2 + \boldsymbol{S}_2^2 + 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2$, und dass $\boldsymbol{S}_i^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) = 3(\frac{\hbar}{2})^2$ um die Spin-Spin Wechselwirkung umzuschreiben wie

$$\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S}^2 - 6(\tfrac{\hbar}{2})^2\right). \tag{11}$$

Der Hamilton-Operator ist dann gegeben durch

$$H = -\frac{2\mu_B}{\hbar} B S_z - \frac{J}{2}\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \left(\boldsymbol{S}^2 - 6(\tfrac{\hbar}{2})^2\right) \tag{12}$$

Finden wir also die Eigenzustände von S_z und $\boldsymbol{S}^2$ haben wir auch die Eigenzustände des Hamilton-Operators. Diese Zustände sind $|s, s_z\rangle$ mit $s = 0, 1$ und $-s \leq s_z \leq s$. Die Eigenwerte sind

$$\boldsymbol{S}^2 |s, s_z\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, s_z\rangle, \qquad S_z|s, s_z\rangle = \hbar s_z |s, s_z\rangle \tag{13}$$

Die Zustände $|s, s_z\rangle$, $s = 0, 1$, $-s \leq s_z \leq s$ sind die bekannten singulett und triplett Zustände

$$|s, s_z\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), & s = 0, s_z \\ |--\rangle, & s = 1, s_z = -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), & s = 1, s_z = 0 \\ |++\rangle, & s = 1, s_z = 1 \end{cases} \tag{14}$$

und die Eigenenergien sind

$$E(s, s_z) = -2\mu_B B s_z - \frac{J}{2}\Big(4s(s+1) - 6\Big) = \begin{cases} 3J, & s = 0, s_z = 0 \\ 2\mu_B B - J, & s = 1, s_z = -1 \\ -J, & s = 1, s_z = 0 \\ -2\mu_B B - J, & s = 1, s_z = 1 \end{cases} \tag{15}$$

Alternative Lösung In der Basis

$$\begin{matrix} |++\rangle \\ |+-\rangle \\ |-+\rangle \\ |--\rangle \end{matrix} \tag{16}$$

haben wir

$$S_{z,1} = S_z \otimes \mathbb{1} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S_{z,2} = \mathbb{1} \otimes S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

und daher

$$-\frac{2\mu_B}{\hbar}(S_{z,1}+S_{z,2}) = -\mu_B B \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Ausserdem haben wir

$$\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = S_{x,1}S_{x,2} + S_{y,1}S_{y,2} + S_{z,1}S_{z,2} = 2S_{+,1}S_{-,2} + 2S_{-,1}S_{+,2} + S_{z,1}S_{z,2} \tag{19}$$

wobei $2S_{\pm,i} = S_{x,i} \pm iS_{y,i}$, $i = 1, 2$. In der 4×4 Darstellung:

$$\begin{aligned} S_{+,1}S_{-,2} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |+-\rangle\langle -+| = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{-,1}S_{+,2} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |-+\rangle\langle +-| = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_{z,1}S_{z,2} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

also haben wir

$$-J\left(\frac{2}{\hbar}\right)^2 \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 = -J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & -2J & 0 \\ 0 & -2J & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J \end{pmatrix} \tag{21}$$

und der ganze Hamilton-Operator hat die 4×4 Form

$$H = \begin{pmatrix} -2\mu_B - J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & -2J & 0 \\ 0 & -2J & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_B - J \end{pmatrix} \tag{22}$$

Zwei Eigenzustände $|++\rangle$ und $|--\rangle$ mit den Eigenwerten $-2\mu_B - J$ und $2\mu_B - J$ können wir direkt ablesen. Die anderen Eigenzustände bekommen wir indem wir die Eigenzustände und Eigenwerte der Matrix

$$J\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

in der Basis $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ finden. Diese sind $(|+-\rangle \pm |-+\rangle)/\sqrt{2}$ mit Eigenwerten $J(1 \mp 2)$.

$\boxed{4}$ Jaynes-Cummings-Modell (4 Punkte)

(a) Wir sollen Zeigen, dass $[N, H] = [\sigma_z + 2a^\dagger a, H] = [\sigma_z, H] + 2[a^\dagger a, H] = 0$. Wir können den Kommutator $[\sigma_z, H]$ einfach berechnen indem wir die Relationen $[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$ benutzen:

$$[\sigma_z, H] = [\sigma_z, \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)] = \hbar g[\sigma_z, \sigma_+]a + \hbar g[\sigma_z, \sigma_-]a^\dagger = 2\hbar g(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) \tag{24}$$

Der Kommutator $[a^\dagger a, H]$ ist auch einfach wenn wir die Relation $[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger$ und $[a^\dagger a, a] = -a$ benutzen

$$[a^\dagger a, H] = [a^\dagger a, \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)] = \hbar g\sigma_+[a^\dagger a, a] + \hbar g\sigma_-[a^\dagger a, a^\dagger] = -\hbar g(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) \tag{25}$$

Daraus folgt $[N, H] = 0$.

(b) Die Schrödinger-Gleichung ist gegeben durch

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \tag{26}$$

Setzen wir den Ansatz $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|+,0\rangle + \beta(t)|-,1\rangle$ ein und projizieren auf $|+,0\rangle$ und $|-,1\rangle$ kriegen wir

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle +,0|H|+,0\rangle & \langle +,0|H|-,1\rangle \\ \langle -,1|H|+,0\rangle & \langle -,1|H|-,1\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \tag{27}$$

Wir haben für die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \langle +,0|H|+,0\rangle &= \frac{\hbar\omega_0}{2}, \qquad \langle +,0|H|-,1\rangle = \hbar g \\ \langle -,1|H|+,0\rangle &= \hbar g, \qquad \langle -,1|H|-,1\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\omega \end{aligned} \tag{28}$$

und daher

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar g \\ \hbar g & -\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \tag{29}$$

oder

$$\begin{aligned} i\dot{\alpha} &= \tfrac{\omega_0}{2}\alpha + g\beta \\ i\dot{\beta} &= g\alpha + (-\tfrac{\omega_0}{2} + \omega)\beta \end{aligned} \tag{30}$$

(c) Also haben wir für $\omega_0 = \omega$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar g \\ \hbar g & \frac{\hbar\omega_0}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \tag{31}$$

Der Hamilton-Operator in dieser Schrödinger-Gleichung hat die Eigenzustände $\begin{pmatrix}1 \\ \pm 1\end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $\frac{\hbar\omega_0}{2} \pm \hbar g$, also können wir die Lösung auf die Form

$$\begin{pmatrix}\alpha(t) \\ \beta(t)\end{pmatrix} = c_+ e^{-i(\frac{\omega_0}{2}+g)t}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} + c_- e^{-i(\frac{\omega_0}{2}-g)t}\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix} \tag{32}$$

schreiben. Für $t = 0$ haben wir $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$ und somit muss $c_+ + c_- = 1$ und $c_+ - c_- = 0$ sein, d.h. $c_+ = c_- = 1/2$ und

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} \begin{pmatrix} \cos gt \\ -i \sin gt \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} \Big(\cos gt |+, 0\rangle - i \sin gt |-, 1\rangle \Big) \tag{33}$$

(d) Für die Erwartungswerte haben wir (nehmen wir erst $|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|+, 0\rangle + \beta(t)|-, 1\rangle$) dann

$$\langle \sigma_z \rangle = \langle \psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle = |\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2, \qquad \langle a^\dagger a \rangle = \langle \psi(t)|a^\dagger a|\psi(t)\rangle = |\beta(t)|^2 \tag{34}$$

und daher

$$\langle N \rangle = \langle \sigma_z + 2a^\dagger a \rangle = \langle \sigma_z \rangle + 2\langle a^\dagger a \rangle = |\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 + 2|\beta(t)|^2 = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1 \tag{35}$$

Für $\alpha(t) = e^{-i\frac{\omega_0}{2}} \cos gt$ und $\beta(t) = -ie^{-i\frac{\omega_0}{2}} \sin gt$ haben wir

$$\langle \sigma_z \rangle = \cos^2 gt - \sin^2 gt = \cos 2gt, \quad \langle a^\dagger a \rangle = \sin^2 gt \tag{36}$$

und

$$\langle N \rangle = \langle \sigma_z + 2a^\dagger a \rangle = \langle \sigma_z \rangle + 2\langle a^\dagger a \rangle = \cos^2 gt - \sin^2 gt + 2\sin^2 gt = \cos^2 gt + \sin^2 gt = 1 \tag{37}$$

$\boxed{5}$ Bewegungsgleichung Dichtematrix **(3 Punkte)**

(a)

$$i\hbar\dot{\hat{\rho}} = [H,\rho] \Rightarrow i\hbar\dot{\rho}_{nn'} = \sum_{\tilde{n}} (H_{n\tilde{n}}\rho_{\tilde{n}n'} - \rho_{n\tilde{n}}H_{\tilde{n}n'}) = \hbar\omega(n-n')\rho_{nn'} \tag{38}$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung

$$\rho_{nn'}(t) = e^{-i\omega(n-n')t}\rho_{nn'}(0) \tag{39}$$

(b) Berechnen wir den Erwartungswert (**siehe auch Anmerkung nächste seite**)

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)x) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_n \langle n|\hat{\rho}(t)(a^\dagger + a)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_{nn'}\langle n|\hat{\rho}(t)|n'\rangle\langle n'|(a^\dagger + a)|n\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_{nn'}\rho_{nn'}(t)\left(\sqrt{n'+1}\,\delta_{n,n'+1} + \sqrt{n'}\,\delta_{n,n'-1}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_n\left(\sqrt{n}\rho_{n,n-1}(t) + \sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}(t)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_n\left(\sqrt{n}\rho_{n,n-1}e^{-i\omega t} + \sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}e^{i\omega t}\right) \\
&= A\cos\omega t + B\sin\omega t
\end{aligned} \tag{40}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_n\left(\sqrt{n}\rho_{n,n-1} + \sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}\right) \\
B &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\sum_n\left(-i\sqrt{n}\rho_{n,n-1} + i\sqrt{n+1}\rho_{n,n+1}\right)
\end{aligned} \tag{41}$$

Wir sehen dass wir für $t=0$ haben dass $\bar{x}(0) = A$. Wenn wir die Ableitung von $\bar{x}(t)$ bezüglich t bilden haben wir $\dot{\bar{x}}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega\cos\omega t$ und $\dot{\bar{x}}(0) = \omega B$. Also haben wir

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(0)\cos\omega t + \frac{\dot{\bar{x}}(0)}{\omega}\sin\omega t \tag{42}$$

Anmerkung: Die Form von $\bar{x}(t)$ kann etwas attraktiver dargestellt werden indem man schreibt

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)(a^\dagger + a)) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\mathrm{Tr}(\hat{\rho}(t)a^\dagger) + c.c.\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\sum_n\sqrt{n}\rho_{n,n-1}e^{-i\omega t} + c.c.\right) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}}\mathrm{Re}\left(\sum_n\sqrt{n}\rho_{n,n-1}e^{-i\omega t}\right)
\end{aligned} \tag{43}$$

Dann hat man

$$A = \bar{x}(0) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \mathrm{Re} \left(\sum_n \sqrt{n} \rho_{n,n-1} \right)$$

und

$$B = \omega \dot{\bar{x}}(0) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \mathrm{Im} \left(\sum_n \sqrt{n} \rho_{n,n-1} \right).$$

$\boxed{6}$ Dirac-Matrizen **(2 Punkte)**

(a)

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = (\alpha^i p_i)^2 = \alpha^i p_i \alpha^j p_j = p_i p_j \alpha^i \alpha^j = \frac{1}{2}\left(p_i p_j \alpha^i \alpha^j + p_j p_i \alpha^j \alpha^i\right) = \frac{1}{2} p_i p_j \{\alpha^i, \alpha^j\}$$
$$= p_i p_j \delta^{ij} = \boldsymbol{p}^2 \tag{44}$$

(b)

$$(\gamma^\mu p_\mu)^2 = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 \tag{45}$$

Alternative Lösungen

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i p_i \\ \sigma_i p_i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (\sigma_i p_i)^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_i p_i)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i p_i \sigma_j p_j & 0 \\ 0 & \sigma_i p_i \sigma_j p_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i p_j \delta_{ij} & 0 \\ 0 & p_i p_j \delta_{ij} \end{pmatrix}$$
$$= \mathbb{1}\boldsymbol{p}^2 \tag{46}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu)^2 = (\beta p^0 + \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = (\beta p^0)^2 + \beta p^0 \beta \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta p^0 + (\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 \tag{47}$$

benutzt mann dann $\alpha^i \beta = -\beta\alpha^i$ und $\beta^2 = 1$ hat mann:

$$(\gamma^\mu p_\mu)^2 = (p^0)^2 + p^0 \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - p^0 \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2 = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 \tag{48}$$

oder

$$(\gamma^\mu p_\mu)^2 = \begin{pmatrix} p^0 & \sigma^i p_i \\ -\sigma^i p_i & -p^0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (p^0)^2 - (\sigma^i p_i)^2 & p^0(\sigma^i p_i) - p^0(\sigma^i p_i) \\ -p^0(\sigma^i p_i) + p^0(\sigma^i p_i) & -(\sigma^i p_i)^2 + (p^0)^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (p^0)^2 - p_i p_j \delta^{ij} & 0 \\ 0 & -p_i p_j \delta^{ij} + (p^0)^2 \end{pmatrix} = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 \tag{49}$$

7 Relativistischer Spin unter Lorentz-Transformationen (5 Punkte)

Unter einer Lorentz-Transformation haben wir $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ und $\psi'^\dagger(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)$. Also haben wir

$$\boldsymbol{s}'(x') = \frac{\hbar}{2}\psi'^\dagger(x')\boldsymbol{\Sigma}\psi'(x') = \frac{\hbar}{2}\psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\boldsymbol{\Sigma}S(\Lambda)\psi(x) \tag{50}$$

a) Dabei haben wir

$$S(R) = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{51}$$

und daher

$$\begin{aligned} S^\dagger(R)\boldsymbol{\Sigma}S(R) &= \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\sin\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{\Sigma}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\Sigma} + i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}[\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}] + \sin^2\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned} \tag{52}$$

zu berechnen. Benutzen wir $[\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}] = 2i(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\sigma})$ haben wir

$$[\Sigma^i,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}] = 2i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Sigma})^i \tag{53}$$

Ausserdem haben wir

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) &= 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) - \boldsymbol{\Sigma}|\boldsymbol{n}|^2 + i\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n} \\ &= 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) - \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \tag{54}$$

Setzen wir alles zusammen haben wir

$$\begin{aligned} S^{-1}(R)\boldsymbol{\Sigma}S(R) &= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{\Sigma} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Sigma}) + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) \\ &= \cos\theta\boldsymbol{\Sigma} - \sin\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Sigma}) + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) \\ &= \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) + \cos\theta\,(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma})) - \sin\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned} \tag{55}$$

Einsetzen in $\boldsymbol{s}'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger(R)\boldsymbol{\Sigma}S(R)\psi(x)$ gibt

$$\boldsymbol{s}'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger(R)\boldsymbol{\Sigma}S(R)\psi(x) = \boldsymbol{s}_{||} + \boldsymbol{s}_\perp\cos\theta - (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}_\perp)\sin\theta \tag{56}$$

(b) Wir schreiben wieder

$$\boldsymbol{s}'(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger(L)\boldsymbol{\Sigma}S(L)\psi(x) \tag{57}$$

Hier mit $S(L) = \cosh\frac{\eta}{2} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{\eta}{2}$ also haben wir

$$\begin{aligned} S^\dagger(L)\boldsymbol{\Sigma}S(L) &= \begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} \\ -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} \\ -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh^2\frac{\eta}{2}\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh^2\frac{\eta}{2} & -\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\{\boldsymbol{\sigma},(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\} \\ -\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\{\boldsymbol{\sigma},(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\} & \cosh^2\frac{\eta}{2}\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh^2\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \\ &= (\cosh^2\tfrac{\eta}{2} - \sinh^2\tfrac{\eta}{2})\boldsymbol{\Sigma} + 2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\sinh^2\tfrac{\eta}{2} - \sinh\eta\;\boldsymbol{n}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\cosh\eta - \boldsymbol{n}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\sinh\eta \end{aligned} \tag{58}$$

wobei wir benutzt haben dass $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \Rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\} = 2\boldsymbol{n}$.

Wir haben nun

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}'(x') &= \psi^\dagger(x) S^\dagger(L) \boldsymbol{\Sigma} S(L) \psi(x) \\
&= \psi^\dagger(x) \left(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\right) \psi(x) + \psi^\dagger(x) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Sigma}) \psi(x) \cosh\eta - \psi^\dagger(x) \boldsymbol{n} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \psi(x) \sinh\eta \\
&= \boldsymbol{s}_\perp + \boldsymbol{s}_{||} \cosh\eta - \boldsymbol{n} s^0 \sinh\eta
\end{aligned} \tag{59}$$

wobei

$$s^0 = \psi^\dagger(x) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \psi(x) \tag{60}$$

Im Ruhesystem haben wir $\psi(x) \propto \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\psi(x) \propto \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$ und deshalb $s^0 = 0$. Also verschwindet dieser letzte Term.

$\boxed{8}$ Clebsch-Gordan-Koeffizienten **(6 Punkte)**

Notation:

$$|J, M\rangle, \qquad |j_1, j_2; m_{j_1}, m_{j_2}\rangle = |j_1, m_{j_1}\rangle \otimes |j_2, m_{j_2}\rangle \tag{61}$$

Wir haben

$$|3, 3\rangle = |2, 1; 2, 1\rangle, \qquad \text{und} \qquad J_- = (J_{1,-} + J_{2,-}). \tag{62}$$

(a)

$$J_-|3, 3\rangle = \hbar\sqrt{6}|3, 2\rangle \tag{63}$$

$$= (J_{1,-} + J_{2,-})|2, 1; 2, 1\rangle = \hbar\sqrt{4}|2, 1; 1, 1\rangle + \hbar\sqrt{2}|2, 1; 2, 0\rangle \tag{64}$$

$$\Rightarrow |3, 2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1; 2, 0\rangle \tag{65}$$

(b)

$$J_-|3, 2\rangle = \hbar\sqrt{10}|3, 1\rangle \tag{66}$$

$$= (J_{1,-} + J_{2,-})\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1; 2, 0\rangle\right) \tag{67}$$

$$= \hbar\sqrt{\frac{12}{3}}|2, 1; 0, 1\rangle + \hbar\sqrt{\frac{4}{3}}|2, 1; 1, 0\rangle + \hbar\sqrt{\frac{4}{3}}|2, 1; 1, 0\rangle + \hbar\sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 2, -1\rangle \tag{68}$$

$$\Rightarrow |3, 1\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|2, 1; 0, 1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}|2, 1; 1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|2, 1; 2, -1\rangle \tag{69}$$

(c) Nun wollen wir die Koeffizienten für $|2, 2\rangle$ herausbekommen. Dieser Zustand muss eine Linearkombination aus $|2, 1; 1, 1\rangle$ und $|2, 1; 2, 0\rangle$ sein:

$$|2, 2\rangle = \alpha|2, 1; 1, 1\rangle + \beta|2, 1; 2, 0\rangle \tag{70}$$

Dieser Zustand muss orthogonal sein zu $|3, 2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 1, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1; 2, 0\rangle$, d.h.

$$0 = \langle 3, 2|2, 2\rangle = \alpha\sqrt{\tfrac{2}{3}} + \beta\sqrt{\tfrac{1}{3}} \tag{71}$$

Dies gibt $\beta = -\sqrt{2}\alpha$. Zusammen mit $1 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2(1 + 2)$, ergibt dies $\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\beta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ also

$$|2, 2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 1; 1, 1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1; 2, 0\rangle \tag{72}$$