Theo E - Nachklausur 2012: Lösungen

1 | Zwei-Zustand-System

a) Die Eigenwertgleichungen für die zwei Zustände sind

$$\begin{aligned} H|\psi_1\rangle &= E_1|\psi_1\rangle \\ H|\psi_2\rangle &= E_2|\psi_1\rangle \end{aligned} \tag{1}$$

Nehmen wir das innere Produkt mit $\langle\psi_2$ bzw $\langle\psi_1|$ haben wir

$$\begin{aligned} \langle\psi_2|H|\psi_1\rangle &= E_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle \\ \langle\psi_1|H|\psi_2\rangle &= E_2\langle\psi_2|\psi_1\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

Da der Hamilton operator Hermitsch ist, haben wir $\langle\psi_1|H|\psi_2\rangle^* = \langle\psi_2|H|\psi_1\rangle$. Ausserdem haben wir $\langle\psi_2|\psi_1\rangle^* = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$. Nehmen wir also das Komplexkonjugat der zweiten Gleichung haben

$$\begin{aligned} \langle\psi_2|H|\psi_1\rangle &= E_1\langle\psi_1|\psi_2\rangle \\ \langle\psi_2|H|\psi_1\rangle &= E_2\langle\psi_1|\psi_2\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen haben wir

$$0 = (E_1 - E_2)\langle\psi_1|\psi_2\rangle \tag{4}$$

Da $E_1 \neq E_2$ muss $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$.

b) Wir suchen Eigenvektoren $|\lambda\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ die die Eigenwertgleichung $A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda$ erfüllen. In der Basis $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ haben wir dann

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

wobei $A_{ij} = \langle\psi_i|A|\psi_j\rangle$. Aus den Gleichungen $A|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ und $A|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$ haben wir dann $A_{11} = A_{22} = 0$ und $A_{12} = A_{21} = 1$, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Die Eigenwerte werden bestimmt aus der Gleichung

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \tag{7}$$

also haben wir $\lambda = \pm 1$. Einsetzen in der Eigenwertgleichung ergibt $c_2 = \lambda c_1$ und $c_1 = \lambda c_2$. Da $\lambda^2 = 1$ müssen $|c_1|^2 = |c_2|^2$. Mit der Normalisierung $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ haben wir dann schliesslich für $\lambda = +$ die Koefficienten $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$ und für $\lambda = -1$ die Koeffizienten $c_1 = -c_2 = 1/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \lambda = +, \quad |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right) \\ \lambda = -, \quad |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\right) \end{aligned} \tag{8}$$

c) Der Zeitentwicklungsoperator ist $U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$. Wir haben dann

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\psi_1\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\psi_2\rangle\right) \tag{9}$$

Die Wahrscheinlichkeit dass das System am Zeitpunkt t wieder in den Zustand $|\psi(0)\rangle$ zu finden ist, wird gegeben durch

$$\begin{aligned} P = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 &= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle\psi_1| - \langle\psi_2|\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\psi_1\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\psi_2\rangle\right)\right|^2 \\ &= \left|\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)\right|^2 \\ &= \left|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{(E_1+E_2)}{2}}\cos\left(\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar}\right)\right|^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

---

2 | Ehrenfest'sches Theorem

a) Die Heisenberg Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{i\hbar}[x, H] = \frac{1}{i\hbar 2m}[x, p^2] + \frac{1}{i\hbar}[x, V(x)] = \frac{1}{i\hbar 2m}[x, p^2] \\ \dot{p} &= \frac{1}{i\hbar}[p, H] = \frac{1}{i\hbar 2m}[p, p^2] + \frac{1}{i\hbar}[p, V(x)] = \frac{1}{i\hbar}[p, V(x)] \end{aligned} \tag{11}$$

Am einfachsten berechnet mann die Kommutatoren durch anwendung auf eine Testfunktion $[x, p^2]f(x) = xp^2 f(x) - p^2 x f(x)$ wobei $p^2 x f(x) = -\hbar^2 \partial_x^2 (x f(x)) = -2\hbar^2 \partial_x f(x) - \hbar^2 x \partial_x^2 f(x)$. Also

$$[x, p^2] = 2\hbar^2 \partial_x = 2i\hbar(-i\hbar\partial_x) = 2i\hbar p \tag{12}$$

und $[p, V(x)]f(x) = pV(x)f(x) - V(x)pf(x)$ wobei $pV(x)f(x) = -i\hbar\partial_x(V(x)f(x)) = f(x)\left(-i\hbar\partial_x V(x)\right) + V(x)\left(-i\hbar\partial_x f(x)\right)$ also

$$[p, V(x)] = -i\hbar\partial_x V(x) \tag{13}$$

Die bewegungsgleichungen sind also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{dV}{dx} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \tag{14}$$

wobei wir in der letzen Gleichung die beiden Bewegungsgleichungen zusammengefügt haben.

b) Auf Operatorform hat Gleichung (14) schon die Form der Klassischen Bewegungsgleichung. Nehmen wir aber den Erwartungswert so haben wir

$$m\langle\ddot{x}\rangle = -\left\langle\frac{dV}{dx}\right\rangle \tag{15}$$

Da $\langle\frac{d^2}{dt^2}x\rangle = \frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = \frac{d^2}{dt^2}\bar{x}$ stimmt die linke Seite dieser Gleichung. Es gilt allerdings **nicht** allgemein dass $\langle dV/dx\rangle = dV(\bar{x})/d\bar{x}$.

Für ein Potential der Form $V(x) = V_0 x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ haben wir

$$\left\langle\frac{dV}{dx}\right\rangle = \left\langle nV_0 x^{n-1}\right\rangle = nV_0\langle x^{n-1}\rangle \tag{16}$$

und $\langle x^{n-1}\rangle$ ist nur gleich $\langle x\rangle^{n-1} = \bar{x}^{n-1} = dV(\bar{x})/d\bar{x}$ wenn $n \leq 2$. Also haben wir

$$m\ddot{\bar{x}} = -\frac{dV}{d\bar{x}}, \qquad V(\bar{x}) = V_0 x^n, \quad n \leq 2 \tag{17}$$

---

3 | Entartete zeit-unabhängige Störungstheorie

a) Der ungestörte Hamiltonoperator ist $H = aS_z^2$, und hat die beiden Eigenwerte $E_0 = 0$ und $E_1 = \hbar^2 A$. Der Eigenwert E_1 ist zweifach entartet und gehört zu den Eigenzuständen von S_z mit $m = \pm 1$.

Wir berechnen den Störungsterm

$$B(S_x^2 - S_y^2) = \frac{\hbar^2 B}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] = \hbar^2 B\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{18}$$

Wir müssen die Säkulargleichung

$$0 = \det\left(\langle m|B(S_x^2 - S_y)^2|m'\rangle - E_1^{(1)}\delta_{mm'}\right) \tag{19}$$

für den 2×2-Unterraum der durch die Zustände $m = \pm 1$ aufgespannt wird lösen. Sie lautet

$$\det\begin{pmatrix}-E_1^{(1)} & \hbar^2 B\\ \hbar^2 B & -E_1^{(1)}\end{pmatrix} = (E_1^{(1)})^2 - \hbar^4 B^2 \Rightarrow E_{1,\pm}^{(1)} = \pm\hbar^2 B \tag{20}$$

b) Die exakte lösung ergibt sich durch diagonalisierung des gesamten Hamiltonoperators

$$H = \begin{pmatrix}\hbar^2 A & 0 & \hbar^2 B\\ 0 & 0 & 0\\ \hbar^2 B & 0 & \hbar^2 A\end{pmatrix} \tag{21}$$

Ein Eigenwert ist $E_0 = 0$ und die anderen beiden sind gegeben durch $E_{1,\pm} = \hbar^2(A \pm B)$. Zufällig ergab also die Störungstheorie schon das exakte Resultat.

---

4 | Zeitabhängige Störungstheorie

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator und ein Zweizustandssystem seien durch $H_0 = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \epsilon\sigma_z/2$ charakterisiert. Das Zweizustandssystem und der harmonische Oszillator seien gekoppelt durch $H_1 = g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)e^{\eta t}$. Der gesamte Hamilton-Operator ist gegeben durch $H = H_0 + H_1$.

Wir nutzen die Abkürzungen $|a\rangle = |n\rangle|\uparrow\rangle$ und $|b\rangle = |n+1\rangle|\downarrow\rangle$ und $H_0|a\rangle = E_a|a\rangle$, $H_0|b\rangle = E_b|b\rangle$.

a)

$$\begin{aligned}\langle b|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \langle b|H_1^I(t')|a\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \langle b|e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t'} H_1(t') e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t'}|a\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i\Delta\omega t'} \langle b|H_1(t')|a\rangle \\ &= \frac{g}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i\Delta\omega t'} \langle b|\left(a^\dagger\sigma_- + a\sigma_+\right)|a\rangle e^{\eta t'} \\ &= \frac{g\sqrt{n+1}}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{(i\Delta\omega+\eta)t'} \\ &= \frac{g\sqrt{n+1}}{\hbar}\frac{e^{(i\Delta\omega+\eta)}}{-\Delta\omega + i\eta}\end{aligned} \tag{22}$$

Damit ergibt sich

$$P(t) \equiv |\langle b|\psi(t)\rangle|^2 = \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\hbar}\right)^2 \frac{e^{2\eta t}}{(\Delta\omega)^2 + \eta^2} \tag{23}$$

mit

$$\Delta\omega = \frac{1}{\hbar}(E_b - E_a) = \frac{1}{\hbar}((n+1)\hbar\omega_0 - \frac{\epsilon}{2} - n\hbar\omega_0 - \frac{\epsilon}{2}) = \omega_0 - \epsilon/\hbar \tag{24}$$

Damit ergibt sich die rate,

$$\Gamma = \frac{dP}{dt} = \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\hbar}\right)^2 \frac{2\eta e^{2\eta t}}{(\Delta\omega)^2 + \eta^2} \tag{25}$$

b) Bilden wir das Limes $\eta \to 0$ und benutzen $\lim_{\eta\to 0} \eta/(x^2+\eta^2) = \pi\delta(x)$ haben wir

$$\Gamma = 2\pi \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\hbar}\right)^2 \delta(\Delta\omega) \tag{26}$$

5 | Reduzierte Dichtematrix

a)

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\Big) \\ \Rightarrow \hat{\rho} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| =& \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\Big)\Big(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|\Big) \\ =& \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow|\Big) \end{aligned} \tag{27}$$

In der Matrix-Darstellung (Basis $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$) haben wir

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow} & \rho_{\uparrow\uparrow,\uparrow\downarrow} & \rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\uparrow} & \rho_{\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \\ \rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\uparrow} & \rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & \rho_{\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow} & \rho_{\uparrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \\ \rho_{\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\uparrow,\uparrow\downarrow} & \rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\downarrow} \\ \rho_{\downarrow\downarrow,\uparrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow,\uparrow\downarrow} & \rho_{\downarrow\downarrow,\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Der Zustand ist rein da $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

b) Da nur die Matrixelemente $\rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} = 1/2$, $\rho_{\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow} = -1/2$, $\rho_{\downarrow\uparrow,\uparrow\downarrow} = -1/2$ und $\rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow} = 1/2$ ungleich 0 sind, und davon nur $\rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow}$ und $\rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow}$ die selben Indizes für das zweite Spin haben ($\sigma_2 = \sigma_2'$), ergiebt die Spur über das zweite Spin die reduzierte Dichtematrix $\rho^{\text{red}}_{\sigma_1,\sigma_1'} = \sum_{\sigma_2} \rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_1'\sigma_2}$ explizit

$$\begin{aligned} \rho^{\text{red}}_{\uparrow,\uparrow} &= \rho_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow} = \frac{1}{2} \\ \rho^{\text{red}}_{\uparrow\downarrow} &= 0 \\ \rho^{\text{red}}_{\downarrow\uparrow} &= 0 \\ \rho^{\text{red}}_{\downarrow\downarrow} &= \rho_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow} = \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\rho}^{\text{red}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Dass dieser Zustand nicht rein ist sieht man durch

$$\left(\hat{\rho}^{\text{red}}\right)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \hat{\rho}^{\text{red}} \tag{30}$$

6 | Kohärente Zustände

a) Nehmen wir die Ableitung bezüglich α von der linken Seite:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger}\right) = -e^{-\alpha a^\dagger} a^\dagger a e^{\alpha a^\dagger} + e^{-\alpha a^\dagger} a a^\dagger e^{\alpha a^\dagger} = e^{-\alpha a^\dagger}[a, a^\dagger] e^{\alpha a^\dagger} = e^{-\alpha a^\dagger} e^{\alpha a^\dagger} = 1 \tag{31}$$

Integrieren wir dies bekommen wir

$$e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger} = \alpha + A \tag{32}$$

wobei A ein α-unabhängiger Operator ist. Da diese Gleichung für beliebiges α gilt, können wir aus der Gleichung für $\alpha = 0$ schliessen, dass $A = a$. Der Zustand $|\alpha\rangle$ ist definiert durch $|\alpha\rangle = Ne^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$. Wir haben dann

$$a|\alpha\rangle = aNe^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = N\underbrace{e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha a^\dagger}}_{=1}ae^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = Ne^{\alpha a^\dagger}(a+\alpha)|0\rangle = \alpha Ne^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{33}$$

b) Für die Normalisierung $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ schreiben wir den Zustand als Taylor-Reihe auf

$$|\alpha\rangle = Ne^{\alpha a^\dagger}|0\rangle = N\sum_n \frac{\alpha^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle = N\sum_n \frac{\alpha^n}{n!}\sqrt{n!}|n\rangle = N\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{34}$$

Also haben wir

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = N^2\sum_{nm}\frac{(\alpha^*)^m\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|n\rangle = N^2\sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = N^2e^{|\alpha|^2} \tag{35}$$

und somit $N = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$.

c) Wir haben

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger), \qquad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a-a^\dagger) \tag{36}$$

also haben wir

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^*), \quad \langle p\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\alpha-\alpha^*) \tag{37}$$

und

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|(a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + (a^\dagger)^2)|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(1 + (\alpha+\alpha^*)^2)\\ \langle p^2\rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle\alpha|(a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + (a^\dagger)^2)|\alpha\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}(-1 + (\alpha-\alpha^*)^2)\end{aligned} \tag{38}$$

Deswegen haben wir auch $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ und $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$ und

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{\hbar m\omega}{2} = \frac{\hbar^2}{4} \tag{39}$$

d) Diese Gleichung folgt direkt aus der Gleichung

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Rightarrow \langle x|a|\alpha\rangle = \alpha\langle x|\alpha\rangle \tag{40}$$

Mit $\langle x|\alpha\rangle = \psi(x)$ und $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{p}{m\omega})$ zusammen mit $\langle x|p|\alpha\rangle = -i\hbar\partial_x\langle x|\alpha\rangle = -i\hbar\partial_x\psi(x)$ haben wir dann

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\partial_x\right)\psi(x) = \alpha\psi(x) \tag{41}$$

Einsetzen von dem Ansatz gibt

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\partial_x\left(-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}x\right)\right)\psi(x) = \alpha\psi(x)\\ &\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\left(-\frac{2x-2\langle x\rangle}{4(\Delta x)^2} + i\frac{\langle p\rangle}{\hbar}\right)\right)\psi(x) = \alpha\psi(x)\end{aligned} \tag{42}$$

Notieren wir dass $\langle x\rangle = \Delta x(\alpha+\alpha^*)$ und $\langle p\rangle = -i\Delta p(\alpha-\alpha^*)$ so haben wir

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{\hbar}{m\omega}\left(-\frac{1}{2(\Delta x)^2}x+\frac{1}{2\Delta x}(\alpha+\alpha^*)+\frac{\Delta p}{\hbar}(\alpha-\alpha*)\right)\right)\psi(x)=\alpha\psi(x) \tag{43}$$

mit $2(\Delta x)^2 = \hbar/m\omega$ haben wir dann

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{\hbar}{2m\omega\Delta x}(\alpha+\alpha^*)+\frac{\Delta p}{m\omega}(\alpha-\alpha^*)\right)\psi(x)=\alpha\psi(x) \tag{44}$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^*)+\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha-\alpha^*)\right)\psi(x)=\alpha\psi(x) \tag{45}$$

welches die Gleichung zeigt.

---

7 | Dirac Gleichung in einem Magnetfeld

a) Die stationäre Dirac-Gleichung lautet

$$\frac{1}{c}(E-\beta mc^2)\Psi = \alpha^i\left(-i\hbar\partial_{x^i}-\frac{q}{c}A_i\right)\Psi \tag{46}$$

Die beiden gewünschten Teilgleichungen sind

$$\frac{1}{c}(E-mc^2)\phi_1 = \sigma^i\left(-i\hbar\partial_{x^i}-\frac{q}{c}A_i\right)\phi_2 \tag{47}$$

und

$$\frac{1}{c}(E+mc^2)\phi_2 = \sigma^i\left(-i\hbar\partial_{x^i}-\frac{q}{c}A_i\right)\phi_1 \tag{48}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste ergibt

$$\frac{1}{c^2}\left[E^2-m^2c^4\right]\phi_1 = \left[\sigma^i\left(-i\hbar\partial_{x^i}-\frac{q}{c}A_i\right)\right]^2\phi_1 \tag{49}$$

b) Wir setzen den Ansatz

$$\phi_1(x,y,z) = \chi_1(y)e^{i(k_x x+k_z z)} \tag{50}$$

ein und erhalten

$$\frac{1}{c^2}\left[E^2-m^2c^4\right]\chi_1(y) = \left[-\hbar^2\partial_y^2+\left(\hbar k_x-\frac{e}{c}By\right)^2+\hbar^2k_z^2+\frac{\hbar e}{c}B\sigma_z\right]\chi_1(y) \tag{51}$$

Dies führt auf die Eigenwertgleichung

$$\hbar^2\partial_y^2\chi_1-\left(\hbar k_x-\frac{e}{c}By\right)^2\chi_1+\left(\frac{E^2}{c^2}-m^2c^2-\hbar^2k_z^2-\frac{\hbar e}{c}B\sigma_z\right)\chi_1=0 \tag{52}$$

Eine solche Eigenwertgleichung is bekannt von dem harmonischen Oszillator. Wir führen die variable

$$\xi=\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\left(y-\frac{c\hbar k_x}{eB}\right),\qquad \partial_\xi^2=\frac{\hbar c}{eB}\partial_y^2 \tag{53}$$

ein und erhalten für die Spinkomponente in z-richtung, $\sigma=\pm1$,

$$\left(\partial_\xi^2-\xi^2+a_\sigma\right)\chi(y)=0,\qquad a_\sigma=\frac{E^2-m^2c^4-(\hbar ck_z)^2+\hbar cq\sigma B}{\hbar ceB} \tag{54}$$

c) Die Energieeigenwerte sind gegeben durch $a_\sigma = (2n+1)$ mit $b = 0, 1, 2, \ldots$ also durch die Gleichung

$$E_{n,\sigma}^2 = (2n+1+\sigma)\hbar ceB + m^2c^4 + (\hbar ck_z)^2 \tag{55}$$

Mit der Abkürzung $2n+1+\sigma = 2n'$, und $\hbar k_z = p_z$ erhalten wir

$$E_{n'} = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (cp_z)^2 + 2n'\hbar ceB} \tag{56}$$