Schriftliche Modulprüfung zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila 21.02.2013

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name:

Matrikelnummer:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	$\sum$

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (10 Punkte): Vermischtes

(a) Der Spinor Ψ ist Lösung der Dirac-Gleichung, d.h. es gilt $(i\not{\partial} - m)\Psi = 0$. Welcher Gleichung genügt $\overline{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$?

(b) Zeigen Sie, dass gilt $\gamma^\mu \not{p}\, \gamma_\mu = -2\not{p}$.

(c) Berechnen Sie folgende Spur: $\mathrm{Tr}(\not{p}\, \gamma^\mu \not{p}\, \gamma_\mu)$.

(d) Betrachten Sie ein System aus zwei Spin-1/2-Teilchen. Welche Werte kann der Gesamtspin des Systems annehmen?

(e) Betrachten Sie ein System aus einem Spin-1- und einem Spin-1/2-Teilchen. Welche Werte kann der Gesamtspin des Systems annehmen? Wie lauten die dazugehörigen Werte für die magnetische Quantenzahl?

(f) Betrachten Sie ein System aus drei identischen Teilchen mit Spin. Die Einteilchen-Zustände werden durch die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}\,)$ beschrieben. Konstruieren Sie die Gesamtwellenfunktion für den Fall von drei Bosonen.

(g) $|njm\rangle$ sei ein Eigenvektor der Operatoren $\vec{J}^{\,2}$ und J_z. A sei ein Operator für den gilt $[A, J_z] = 0$. Bestimmen Sie die Werte von m und m', für die das Matrixelement $\langle njm'|A|njm\rangle$ von Null verschieden sein kann.

(h) Ein Spinor transformiert sich unter Lorentztransformation Λ folgendermaßen: $\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$. Zeigen Sie, dass $\overline{\Psi}\Psi$ ein Skalar ist.

(i) Zeigen Sie, dass gilt $\overline{\gamma}^5 \equiv \gamma^0(\gamma^5)^\dagger\gamma^0 = -\gamma^5$.

(j) $\psi(t)$ erfülle die zeitabhängie Schrödinger-Gleichung und $U(t, t_0)$ sei der Zeitentwicklungsoperator mit $\psi(t) = U(t, t_0)\psi(t_0)$. Wie lautet die Bestimmungsgleichung für $U(t, t_0)$? Wie lautet die (formale) Lösung?

Aufgabe 2 (10 Punkte): Eichinvarianz

Betrachten ein relativistisches geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Zeigen Sie, dass die Dirac-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\vec{A} \to \vec{A}' \;=\; \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda\,, \quad \Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \quad \text{und} \quad \Psi \to \Psi' = e^{iq\Lambda}\,\Psi\,,$$

wobei Ψ die Lösung der Dirac-Gleichung, $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen vom Orts-Vierervector x^μ. q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Relativistische Korrekturen

Der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie ist $E_{kin} = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$.
(a) Wie lautet der Korrekturterm H_{rel} erster Ordnung in $\vec{p}^2/(mc)^2$ zum kinetischen Operator $\frac{\vec{p}^2}{2m}$?
(b) Betrachten Sie H_{rel} als Störung, und berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung zur Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms. Der ungestörte Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms ist gegeben durch $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r}$. [*Hinweis:* $H_{rel} \sim (\vec{p}^2)^2$].

Aufgabe 4 (10 Punkte): Wasserstoffatom im Magnetfeld

Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Die Spin-Bahn-Kopplung, der diamagnetische Term und der Spin des Protons werden vernachlässigt.

(a) Bestimmen Sie die Energieniveaus für $n = 1, 2$ und deren Entartungsgrad.

(b) Welche Übergänge zwischen den Niveaus $2p$ und $1s$ sind in der elektrischen Dipol-Näherung möglich? Geben Sie die möglichen Übergänge und deren Frequenzen explizit an.

(c) Berechnen Sie das Verhältnis der Übergangsraten $|2p\rangle \to |1s\rangle$ bei spontaner Emission in der elektrischen Dipol-Näherung für die maximale und minimale Frequenz.

Hinweis: Für die Übergangsrate in der elektrischen Dipol-Näherung gilt: $\Gamma_{m\to n} \sim \omega_{mn}^3 |\langle n|\vec{r}|m\rangle|^2$.

Aufgabe 5 (10 Bonuspunkte): Sudden Approximation

Auf einen elektrisch geladenen harmonischen Oszillator, der sich im Grundzustand befindet, wirke plötzlich ein im weiteren Zeitablauf konstantes, homogenes, elektrisches Feld $\vec{E}$ in Richtung des Oszillators ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Übergang des Oszillators aus dem Grundzustand in den n-ten angeregten Zustand mit Hilfe der “sudden approximation”.

Hinweis: Die Lösung des harmonischen Oszillators in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ kann man durch einfaches Verschieben der Variablen in der Lösung für $\vec{E} = 0$ erhalten.

Hilfsformeln:

(i) $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)$ für $x \to 0$.
(ii) $\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$.

(iii) Die normierten Energieeigenfunktionen des Wasserstoffatoms sind gegeben durch
$\Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$, wobei $Y_{lm}(\theta,\phi)$ die Kugelflächenfunktionen bezeichnen.
Es gilt: $R_{10}(r) = 2a_0^{-3/2}e^{-r/a_0}$, $R_{20}(r) = 1/\sqrt{2}a_0^{-3/2}(1 - 1/2\ r/a_0)e^{-1/2\ r/a_0}$,
$Y_{00}(\theta,\phi) = 1/\sqrt{4\pi}$, $Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{3}\cos\theta/\sqrt{4\pi}$, $Y_{1\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{3}\sin\theta e^{i\pm\phi}/\sqrt{8\pi}$,
$\langle 1/r\rangle = 1/(a_0n^2)$, $\langle 1/r^2\rangle = 1/(a_0^2n^3(l+1/2))$ mit dem Bohr Radius $a_0 = \hbar/(Z\alpha mc)$.

(iv) Die normierten Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind gegeben durch
$\Phi_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{-1/2}H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$, wobei $H_n(x)$ die Hermite-Polynome bezeichnen und
$x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. Es gilt: $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 1$,
$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)e^{-(x^2-xa+a^2/2)}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}a^ne^{-a^2/4}$.

(v) Einige Clebsch-Gordan Koeffizienten für die Addition von zwei $j = 1$ Drehimpulsen:
$\langle 1,1;+1,-1|0,0\rangle = 1/\sqrt{3}$, $\langle 1,1;-1,+1|0,0\rangle = 1/\sqrt{3}$, $\langle 1,1;0,0|0,0\rangle = -1/\sqrt{3}$.
