Schriftliche Modulprüfung zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila 16.04.2013

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name:

Matrikelnummer:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (11 Punkte): Vermischtes

(a) Der Spinor $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ sei Lösung der Dirac-Gleichung, d.h. es gilt $(i\not{\partial} - m)\Psi = 0$. Zeigen Sie, dass ψ_i Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist.

(b) Berechnen Sie folgende Spur: $\mathrm{Tr}(\not{p}\not{p}\gamma^\mu\gamma_\mu)$.

(c) a^μ und b^μ seien 4-Vektoren. Zeigen Sie, dass $T^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ ein Tensor zweiter Stufe ist.

(d) Betrachten Sie ein System aus zwei identischen Teilchen mit Spin 1/2. Konstruieren Sie die Gesamtwellenfunktion für den Fall, dass der Gesamtspin Null ist.

(e) Zeigen Sie, dass die Spur über drei Gammamatrizen Null ist.

(f) Zeigen Sie, dass für $\overline{\gamma}^\mu \equiv \gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0$ gilt $\overline{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$.

(g) Ein Spinor transformiert sich unter Lorentztransformation Λ folgendermaßen: $\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$. Dabei gilt $S\gamma^\mu S^{-1}\Lambda^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$. Zeigen Sie, dass $\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ein Vektor ist.

(h) Begründen Sie, warum Matrizen der Dimension zwei die Relation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\})$ nicht erfüllen können.

(i) Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in der Dipolnäherung. Welche Übergänge zwischen den Niveaus $2P$ und $1S$ sind erlaubt?

(j) Die Schrödinger-Gleichung im Wechselwirkungsbild lautet $i\hbar\partial_t\psi_I = V_I\psi_I$. Formen Sie diese Gleichung in eine Integralgleichung um.

(k) Betrachten Sie ein System aus zwei Spin-1-Teilchen. Welche Werte kann der Gesamtspin annehmen? Wie groß ist der jeweilige Entartungsgrad?

Aufgabe 2 (9 Punkte): Myonium im Magnetfeld

Myonium ist ein System, das aus einem Elektron e^- und einem positiven Myon μ^+ (Spin 1/2 Teilchen) besteht. Betrachten Sie ein solches System im Grundzustand in Anwesenheit eines Magnetfelds $\vec{B}$ parallel zur z-Achse. Der Hamilton-Operator kann fogendermaßen geschrieben werden:

$$H = H_0 + H_{HF} + H_z\,, \quad \text{mit} \quad H_{HF} = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad \text{und} \quad H_Z = -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}\,.$$

Dabei bezeichnet H_0 den Hamilton-Operator des Myonium, der nur die elektrostatische Wechselwirkung zwischen Elektron und Myon enthält. $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ sind die Spinoperatoren von Elektron bzw. Myon und $\vec{\mu}_1$ und $\vec{\mu}_2$ deren magnetische Momente. $\vec{S}_i$ und $\vec{\mu}_i$ sind durch die gyromagnetischen Verhältnisse γ_1 und γ_2 miteinander verknüpft: $\vec{\mu}_i = \gamma_i \vec{S}_i\,, \quad i = 1, 2\,.$

(a) Betrachten Sie $H_{HF} + H_z$ als Störung zu H_0. Bestimmen Sie die Aufspaltung des Grundzustands $(1S)$ in erster Ordnung Störungstheorie.

(b) Stellen Sie graphisch die Energieaufspaltung aus Aufgabenteil (a) als Funktion des Magnetfelds B dar.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Elektron-Proton-Streuung

Die Elektronstreuung an einem Proton $e^-(p_i) + p(P_i) \to e^-(p_f) + p(P_f)$ wird durch das folgende Spinor-Matrixelement beschrieben

$$\mathcal{M} \;=\; \overline{u}(p_f, s_f)\gamma^\mu u(p_i, s_i)\,\frac{e^2}{q^2}\,\overline{u}(P_f, S_f)\gamma_\mu u(P_i, S_i)\,, \quad \text{mit} \quad q = p_f - p_i = P_f - P_i\,,$$

wobei $p_i\,, p_f$ und $P_i\,, P_f$ die Viererimpulse des ein- und auslaufenden Elektrons bzw. Protons bezeichnen. $s_i, s_f, S_i, S_f \in \{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ sind die Spinquantenzahlen.

(a) Berechnen Sie

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{S_f, S_i, s_f, s_i}\left|\overline{u}(p_f, s_f)\gamma^\mu u(p_i, s_i)\,\frac{e^2}{q^2}\,\overline{u}(P_f, S_f)\gamma_\mu u(P_i, S_i)\right|^2 .$$

Drücken Sie das Resultat als Funktion der Skalarprodukte $P_i \cdot p_i\,, P_i \cdot p_f\,, P_f \cdot p_i\,, P_f \cdot p_f\,, p_i \cdot p_f\,, P_i \cdot P_f$ und Massen m und M von Elektron und Proton aus.

(b) Drücken Sie das Resultat von Aufgabenteil (a) als Funtion von der Protonmasse M und der Energie und dem Streuwinkel des Elektrons im Laborsystem, *d.h.* in dem Bezugsystem, indem das einlaufende Proton in Ruhe ist, aus. Betrachten Sie dabei das Elektron als extrem relativistisch, *d.h.* Terme, die mit m/E unterdrückt sind, können vernachlässigt werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Sudden Approximation

Auf einen elektrisch geladenen harmonischen Oszillator, der sich im Grundzustand befindet, wirke plötzlich ein im weiteren Zeitablauf konstantes, homogenes, elektrisches Feld $\vec{E}$ in Richtung des Oszillators ein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Übergang des Oszillators aus dem Grundzustand in den n-ten angeregten Zustand mit Hilfe der "sudden approximation".

Hinweis: Die Lösung des harmonischen Oszillators in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ kann man durch einfaches Verschieben der Variablen in der Lösung für $\vec{E} = 0$ erhalten.

Hilfsformeln:

(i) $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3)$ für $x \to 0$.

(ii) $\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$.

(iii) Die normierten Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind gegeben durch

$\Phi_n(x) = (2^n n!\sqrt{\pi}x_0)^{-1/2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$, wobei $H_n(x)$ die Hermite-Polynome bezeichnen und $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. Es gilt: $H_0(x) = 1\,, H_1(x) = 2x\,, H_2(x) = 4x^2 - 1$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-(x^2 - xa + a^2/2)}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}a^n e^{-a^2/4}$.

iv) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}\,, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\,.$

(v) $S^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$.
