Übungsklausur zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila 18.12.2012

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name: [ ] Gruppe: [ ]

Matrikelnummer: [ ]

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Ein Wasserstoffatom im Grundzustand befindet sich in einem elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$. Geben Sie den Hamilton-Operator, der den Einfluß des elektrischen Feldes beschreibt, an. Berechnen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordung die Energiekorrekturen.

Hinweise: (i) Die Wellenfunktion des Wasserstoffatoms im Grundzustand lautet $\Psi_{100}(\vec{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \phi)$ mit $R_{10}(r) = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$ und $Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, wobei a den Bohrschen Radius bezeichnet.

(ii) Vernachlässigen Sie dabei den Einfluß der Fein- und Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms. Betrachten Sie das Wasserstoffatom als nicht-relativistisches System.

(b) Gegeben seien die Vierervektoren $a^\mu = (a_0, \vec{a})^T$, $b^\mu = (b_0, \vec{b})^T$, $c^\mu = (c_0, \vec{c})^T$. Welche der folgenden Ausdrücke sind invariant unter räumlichen Drehungen: (i) $a_0\vec{b}$, (ii) $a_\mu b_\nu c_\rho \varepsilon^{\mu\nu\rho 0}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Berechnen Sie $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu$.

(d) Berechnen Sie den Kommutator $[\gamma^\mu, \sigma^{\nu\rho}]$ mit $\sigma^{\nu\rho} = \frac{i}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\rho]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben seien drei nicht identische Teilchen mit Spin $1/2, 1/2$ und 1. Was sind die möglichen Werte für den Gesamtspin J des Systems? Wieviele Zustände kommen jeweils vor?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein System bestehe aus zwei verschiedenen Teilchen mit jeweils Spin 1/2. Sei $\vec{r}(r,\theta,\phi) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, wobei $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ die Ortsvektoren der Teilchen sind.

(a) Zeigen Sie, dass der Operator $S_{12} = 2\left(3\frac{(\vec{S}\cdot\vec{r})^2}{r^2} - \vec{S}^{\,2}\right)$, wobei $\vec{S}$ der Gesamtspin ist, nur von den Polar- und Azimutwinkeln θ und ϕ und den Spinquantenzahlen abhängt. Zeigen Sie, dass die Abhängigkeit von θ und ϕ durch Kugelflächenfunktionen mit $l = 2$ ausgedrückt werden kann.
(b) Zeigen Sie, dass der Operator S_{12} in folgende Form übergeführt werden kann

$$S_{12} = \sqrt{\frac{24\pi}{5}} T^{(2)} \cdot S^{(2)} \,,$$

wobei $T^{(2)}$ und $S^{(2)}$ irreduzible Tensoroperatoren zweiter Stufe sind, die Funktionen der Bahn- bzw. Spinvariablen sind. Dabei ist das Skalarprodukt folgendermaßen definiert

$$T^{(2)} \cdot S^{(2)} = \sum_{q=-2}^{2} (-1)^q T_q^{(2)} S_{-q}^{(2)} \,.$$

Geben Sie explizite Ausdrücke für $T_q^{(2)}$ und $S_{-q}^{(2)}$ an und zeigen Sie/begründen Sie, dass $T^{(2)}$ und $S^{(2)}$ irreduzible Tensoroperatoren zweiter Stufe sind.

Hinweise: (i) Es ist günstig, die Operatoren $S_\pm = S_x \pm iS_y$ einzuführen.

(ii) $\quad [S_z, S\pm] = \pm\hbar S_\pm \,, \quad [S_+, S_-] = 2\hbar S_z \,, \quad S_+S_- = S_x^2 + S_y^2 + \hbar S_z \,;$

$$Y_{20}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)\,,\ Y_{2\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}\,,\ Y_{2\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}\,.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines relativistischen geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld. Zeigen Sie, dass die Klein-Gordon-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned} \vec{A} \to \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \,, \\ \Phi \to \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \,, \\ \Psi \to \Psi' &= \Psi\, e^{iq\Lambda} \,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen vom Orts-Vierervector x^μ. q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.
