Modulklausur zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn 01.03.2016

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name: | | Gruppe: | |

Matrikelnummer: | |

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:	1 (5P)	2 (5P)	3 (5P)	4 (5P)	$\sum$ (20P)

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (5 Punkte): „Quickies“

1. Ist γ^μ ein 4-Vektor? Warum? (1P)
2. Die Matrizen α^i $(i = 1, 2, 3)$ und β erfüllen folgende Antikommutations-Relationen: $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}$ und $\{\beta, \alpha^i\} = 0$, wobei $\beta^2 = 1$. Die γ-Matrizen sind gegeben durch $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$. Zeigen Sie, dass hieraus folgt $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. (1P)
3. Zeigen Sie, dass die Spur über drei Gammamatrizen Null ist. (1P)
4. Betrachten Sie eine infinitesimale Lorentz-Transformation der Form $\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \Delta\omega^\nu{}_\mu$. Zeigen Sie, dass gilt $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$. (1P)
5. $|njm\rangle$ sei ein Eigenvektor der Operatoren $\vec{J}^2$ und J_z. A sei ein Operator für den gilt $[A, J_z] = 0$. Bestimmen Sie die Werte von m und m', für die das Matrixelement $\langle njm'|A|njm\rangle$ von Null verschieden sein kann. (1P)

Aufgabe 2 (5 Punkte): Vektorstrom

Betrachten Sie den Strom

$$j^\mu := \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \, .$$

1. Zeigen Sie, dass j^μ ein Vierervektor ist; d.h. zeigen Sie, dass j^μ unter einer Lorentz-Transformation Λ transformiert, wie (1P)

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \, .$$

2. Berechnen Sie das Verhalten der Komponente j^0 im nicht-relativistischen Grenzfall für den Zustand $\psi = u^{(1)}$, d.h. berechnen Sie den führenden Term in der Entwicklung in $|\vec{p}|/m$. (4P)

Aufgabe 3 (5 Punkte): Spins im Zwei-Niveau-System

Gegeben sei ein quantenmechanische System mit zwei Energieniveaus. Der Hamiltonoperator sei bezeichnet mit H und die Eigenzustände heißen ψ_1 und ψ_2, sodass gilt $H\psi_1 = E_1\psi_1$, $H\psi_2 = E_2\psi_2$ und $E_1 < E_2$. Nun betrachten wir ein System aus zwei identischen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in diesem Zwei-Niveau-System. Die Produktzustände des Gesamtsystems lassen sich also charakterisieren über das besetzte Niveau und den Spin des jeweiligen Teilchens:

$$|1;1\rangle|\uparrow;\uparrow\rangle,\ |1;2\rangle|\downarrow;\uparrow\rangle,\ \dots \qquad (*)$$

1. Benutzen Sie das Pauli-Prinzip um alle Eigenzustände des Gesamtsystems zu konstruieren. (1P)
2. Wie lautet der Grundzustand? (1P)
3. Bestimmen Sie die 4x4-Matrix, die den Spin-Spin-Wechselwirkungsoperator $A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ in der Basis (*) darstellt. Verwenden Sie dazu die Zustände in der Reihenfolge $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$, $|\downarrow,\downarrow\rangle$. (2P)
4. Bestimmen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energiekorrektur durch die Spin-Spin-Wechselwirkung für den Grundzustand. (1P)

Aufgabe 4 (5 Punkte): Streuung am winkelabhängigen Potential

Betrachten Sie die Streuung eines quantenmechanischen Teilchens am winkelabhängigen Potential

$$V(\vec{r}) = V_0 \begin{cases} \cos(\theta) & \text{falls } |\vec{r}| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Seien die Wellenvektoren von gestreuter und ungestreuter Welle bezeichnet mit $\vec{k}$ bzw. $\vec{k}'$. Sei ferner $K := |\vec{k}' - \vec{k}|$.

1. Zeigen Sie, dass für die Streuamplitude $f(\theta,\phi)$ in Bornscher Näherung gilt: (2.5 P)
$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{\hbar^2} V_0 \frac{2i(KR\sin(KR) + 2\cos(KR) - 2)}{K^3}.$$
2. Bestimmen Sie damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und entwickeln Sie ihn bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in $KR \ll 1$. (1.5P)
3. Berechnen Sie für $KR \ll 1$ den totalen Wirkungsquerschnitt. (1P)

Einige nützliche Formeln:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\ u^{(2)} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\ \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\ v^{(2)} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \sqrt{\frac{p_0+m}{2m}},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\delta_{ij},\ (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$$

$$S_\pm = S_x \pm iS_y$$

Aufg. 1

1.) Nein! γ^μ bleibt unter Lorentztransformationen invariant, während ein Vektor transformiert wie $a_\mu \longrightarrow \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu$.

2.)
$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = \beta^2 + \beta^2 = 2 = 2g^{00}$$
$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \beta^2 \alpha^i + \beta\alpha^i\beta = \beta^2\alpha^i - \beta^2\alpha^i = 0$$
$$\{\gamma^i, \gamma^0\} = 0 \quad \text{analog}$$
$$\begin{aligned}\{\gamma^i, \gamma^j\} &= \beta\alpha^i\beta\alpha^j + \beta\alpha^j\beta\alpha^i \\ &= -(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i) \\ &= -2\delta^{ij} \\ &= 2g^{ij}\end{aligned}$$

3.)
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\} &= \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\overbrace{\gamma^5\gamma^5}^{1}\} \\ &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5\gamma^\rho\gamma^5\} \\ &= \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^5\} \\ &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^5\} \\ &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho(\gamma^5)^2\} \\ &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\} \Rightarrow \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\} = 0\end{aligned}$$

4) Aus der definierenden Eigenschaft der Lorentz-Transformation

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\nu\sigma} = g^{\mu\rho}$$

folgt

$$g^{\mu\rho} = (g^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu)(g^\rho{}_\sigma + \Delta\omega^\rho{}_\sigma)\, g^{\nu\sigma}$$

$$= g^{\mu\rho} + g^\mu{}_\nu \Delta\omega^{\rho\nu} + g^{\rho\nu}\Delta\omega^\mu{}_\nu + O(\Delta\omega^2)$$

$$= g^{\mu\rho} + \Delta\omega^{\rho\mu} + \Delta\omega^{\mu\rho} \implies \Delta\omega^{\rho\mu} = -\Delta\omega^{\mu\rho}$$

5.) $0 = \langle n'jm' | [A, J_z] | njm \rangle$

$$= \langle njm' | A \underset{\substack{\downarrow \\ m}}{J_z} - \underset{\substack{\downarrow \\ m'}}{J_z} A | njm \rangle$$

$$= (m - m') \underbrace{\langle njm' | A | njm \rangle}_{}$$

$\neq 0$ möglich genau dann, wenn $\underline{\underline{m = m'}}$

Aufg 2

1.) $j^\mu \xrightarrow{\Lambda} j'^\mu = \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi' = \bar{\psi} S^{-1} \gamma^\mu S \psi$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu$$

$\rightsquigarrow$ j^μ ist Lorentz-Vektor

2.)

$$j^0 = \bar{u}^{(1)} \gamma^0 u^{(1)} = u^{(1)\dagger} \overbrace{\gamma^{0\,2}}^{\mathbb{1}} u^{(1)}$$

$$= N^2 \left((1\ 0) \quad (1\ 0) \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \right)^\dagger \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{p_0+m}{2m} \left[1 + (1\ 0) \underbrace{\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2}{(p_0+m)^2}}_{\frac{\vec{p}^2}{(p_0+m)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \simeq m \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2} + \dots \right) \simeq m \right.$$

$$\simeq \left[1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2} \right]$$

Aufg 3

1.) antisymm. Spin-Anteil:

$$\left.\begin{cases} |1;1\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1;2\rangle + |2;1\rangle) \\ |2;2\rangle \end{cases}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

symm. Spinanteil:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1;2\rangle - |2;1\rangle\right) \cdot \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}$$

2.) Grundzustand: $|1;1\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

3.) $S_\pm = S_x \pm i S_y \Rightarrow S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

$$\rightsquigarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1x} S_{2x} + S_{1y} S_{2y} + S_{1z} S_{2z}$$

$$= \frac{1}{4}(S_{1+} + S_{1-})(S_{2+} + S_{2-}) - \frac{1}{4}(S_{1+} - S_{1-})(S_{2+} - S_{2-})$$

$$+ S_{1z} S_{2z}$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}\right) + S_{1z} S_{2z}$$

$$\vec{S}_1 \vec{S}_2 |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\uparrow\downarrow\rangle = \frac{\hbar^2}{2} |\downarrow\uparrow\rangle - \frac{\hbar^2}{4} |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\downarrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar^2}{2} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{\hbar^2}{4} |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 |\downarrow\downarrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4} |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_1 \hat{=} \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.) $E^{(1)} = \langle 1,1| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle \uparrow\downarrow| - \langle \downarrow\uparrow| \right) A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle$

$$= \frac{A}{2} \left(|\ \rangle - |\ \rangle \right) \frac{1}{2} \underbrace{\left(\vec{S}_{1+2}^{\,2} - \vec{S}_1^{\,2} - \vec{S}_2^{\,2} \right)}_{\hbar^2 \left(0 \underbrace{- \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}_{-\frac{3}{2}} \right)} \left(|\ \rangle - |\ \rangle \right)$$

$$= -\frac{3}{8} \hbar^2 A \left(\langle \uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle + \langle \downarrow\uparrow|\downarrow\uparrow\rangle \right) = -\frac{3}{4} \hbar^2 A$$

Aufg. 4

1.) $$f(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^R dr\, r^2 \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, e^{-iKr\cos\theta}\, V_0\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}V_0 \int_0^R dr\, r^2 \left[\frac{1}{(-iKr)}\left(e^{-iKr} + e^{iKr}\right) - \frac{1}{(-iKr)}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, e^{-iKr\cos\theta}\right]$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}V_0 \frac{i}{K}\int_0^R dr\, r\left[2\cos(Kr) - \frac{1}{(-iKr)}\underbrace{\left(e^{-iKr} - e^{iKr}\right)}_{-2i\sin(Kr)}\right]$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}V_0 \frac{2i}{K^2}\underbrace{\int_0^R dr\left[Kr\cos(Kr) - \sin(Kr)\right]}_{\frac{1}{K}\int_0^{KR} dx\left[x\cos(x) - \sin(x)\right]}$$

$$= \frac{1}{K}\Big[+KR\sin(KR) - \underbrace{\int_0^{KR} dx\,\sin x}_{+\cos(KR)-1} + \cos(KR) - 1\Big]$$

$$= \frac{1}{K}\left[2\cos(KR) + KR\sin(KR) - 2\right]$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2}V_0\,\frac{2i\left[2\cos(KR) + KR\sin(KR) - 2\right]}{K^3}$$

2.) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2 = \left(\frac{2V_0 m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{(KR\sin(KR)+2\cos(Kr)-2)^2}{K^6}$$

$\underline{KR \ll 1:}$ $$\sin(KR) \simeq KR - \frac{(KR)^3}{6} \pm \dots$$

$$\cos(KR) \simeq 1 - \frac{(KR)^2}{2} + \frac{(KR)^4}{24} \pm \dots$$

$$\rightsquigarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq (\ )^2 \frac{(KR^2 - (KR)^4\frac{1}{6} + 2 - (KR)^2 + (KR)^4\frac{1}{12} - 2)^2}{K^6}$$

$$\simeq (\ )^2 \frac{(KR)^8 \frac{1}{144}}{K^6} = \left(\frac{2V_0 m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{K^2 R^8}{144}$$

3.) $$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2V_0 m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{R^8}{144} (2\pi) \underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, K^2}_{=:I}$$

$$K^2 = (\vec{k}' - \vec{k})^2 = 2k^2(1-\cos\theta)$$

$$\rightsquigarrow I = 2k^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta\, (1-\cos\theta)}_{=2} = 4k^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{tot} = \left(\frac{2V_0 m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{R^8}{144} (2\pi)\, 4k^2 = \frac{2}{9} \frac{V_0^2 m^2 R^8 k^2}{\hbar^2}$$