Modulklausur zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn 19.04.2016

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Name: ________________ Gruppe: ______

Matrikelnummer: ________________

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:	1 (5P)	2 (5P)	3 (5P)	4 (5P)	$\sum$

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (5 Punkte): „Quickies“

1. Es gilt $\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\alpha\} = a\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\}$. Bestimmen Sie a.
2. Sei $|n, l, m_l, s, m_s\rangle$ der Zustand eines Elektrons im Potential des Wasserstoffatoms. Für welche Werte der Quantenzahlen ist der Operator $H = c_1\vec{L}^2\vec{S}^2 + c_2\vec{L}\cdot\vec{S}$ diagonal? Die Koeffizienten c_1, c_2 sind hier gewöhnliche Zahlen.
3. Gegeben sei ein System mit dem Hamilton-Operator H_0 und der Störoperator $V(t)$. Transformieren Sie die Gleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = (H_0 + V(t))\psi(t)$ ins Wechselwirkungsbild. Wie transformieren sich die Wellenfunktionen? Wie das Potential?
4. Der kinetische Impulsoperator ist gegeben durch $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$. Berechnen Sie $\vec{\pi}\times\vec{\pi}$.
5. Betrachten Sie ein System aus zwei nichtwechselwirkenden identischen Spin-2-Teilchen in den Zuständen $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$. Konstruieren Sie die Gesamtwellenfunktion.
   Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe werden keine Clebsch-Gordon-Koeffizienten benötigt.

Nützliche Formeln:

$$f(\theta,\phi) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{i\delta_l}\sin\delta_l,$$

$$\int_{-1}^{1} dx P_n(x)P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}, \qquad P_n(1) = 1,$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 2 (5 Punkte): Zerfall eines pseudoskalaren Teilchens

Die Zerfallsamplitude eines pseudoskalaren Higgsbosons in ein Elektron-Positron-Paar ist gegeben durch

$$W := \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \left(\bar{u}(p_1,\lambda_1)\gamma_5 v(p_2,\lambda_2)\right)^* \bar{u}(p_1,\lambda_1)\gamma_5 v(p_2,\lambda_2) \ .$$

1. Zeigen Sie, dass gilt

$$W = -\sum_{\lambda_1,\lambda_2} \bar{v}(p_2,\lambda_2)\gamma_5 u(p_1,\lambda_1)\bar{u}(p_1,\lambda_1)\gamma_5 v(p_2,\lambda_2) \ .$$

2. Berechnen Sie die Größe W mit Hilfe des Spurtheorems, und drücken Sie sie durch die Impulse p_1, p_2 und durch die Elektronmasse m_e aus.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Lösung der Dirac-Gleichung

Betrachten Sie die Dirac-Gleichung mit folgender Darstellung der γ-Matrizen:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{*}$$

1. Verwenden Sie den Ansatz $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für $m = 0$ gilt

$$\left.\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_+ = 0 \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_- = 0 \end{aligned}\right\} \text{ mit } \left\{\begin{aligned} (\bar{\sigma}^\mu) = (\mathbb{1}, -\sigma^i) \\ (\sigma^\mu) = (\mathbb{1}, \sigma^i) \end{aligned}\right.$$

2. Nun sei $m \neq 0$. Lösen Sie die Dirac-Gleichung im Impulsraum, $(\not{p} - m)u = 0$, in der Darstellung (*) im Ruhesystem des Teilchens. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p_0 > 0$ und $p_0 < 0$ und normieren Sie die Lösungen.

3. Berechnen Sie die Lösung der Dirac-Gleichung im Impulsraum in obiger Darstellung, falls sich das Teilchen in z-Richtung bewegt. Betrachten Sie hier nur Lösungen mit positiver Energie, und normieren Sie die Lösungen.
Hinweis: Es erweist sich als geschickt, die Variablen $x = \sqrt{E + p_3}$ und $y = \sqrt{E - p_3}$ einzuführen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Streuphasen

Für die Streuphasen eines Streuexperiments sei bekannt, dass

$$\delta_0, \delta_1 > 0 \quad \text{und} \quad \delta_i \approx 0 \text{ für } i > 1 \ .$$

Der gestreute Teil der auslaufenden Wellenfunktion habe die Form

$$\psi(\vec{r}) = f(\theta,\phi) g(r) \frac{1}{r} \quad \text{mit} \quad \int_0^\infty dr |g(r)|^2 = 1 \ .$$

1. Überprüfen Sie die Gültigkeit des optischen Theorems $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(\theta = 0)$ ausgehend von $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$.

2. Ist das Streupotential anziehend oder abstoßend? Warum?

3. Berechnen Sie den Erwartungswert des Drehimpulsoperators $\vec{L}^2$ für $\psi(\vec{r})$.
Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $P_l(\cos\theta) \propto Y_l^0(\theta,\phi)$.

Aufg. 1:

1. $\mathrm{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha\} = \mathrm{Tr}\{\underbrace{\gamma^\alpha \gamma_5 \gamma_\alpha}_{} \gamma^\mu \dots \gamma^\sigma\}$

$$= -\gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_5$$
$$= -g^\alpha{}_\alpha \gamma_5$$
$$= -4\gamma_5$$

$$= \underbrace{-4}_{=a} \mathrm{Tr}\{\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\}$$

2. $\psi := |n, l, m_l, s, m_s\rangle$ ist Eigenzustand zu $\vec{L}^2, \vec{S}^2$
$\rightsquigarrow \vec{L}^2 \vec{S}^2$ ist diagonal.
$\vec{L}\cdot\vec{S}$ ist diagonal für Eigenzustände von $(\vec{L}+\vec{S})^2$ und (L_z+S_z),
und die einzigen gemeinsamen Eigenzustände von
$\vec{L}^2, \vec{S}^2, (\vec{L}+\vec{S})^2$ sind diejenigen mit

$$m_l = l,\ m_s = s$$

bzw. $m_l = -l,\ m_s = -s$.

3. $\psi(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0} \psi_I(t)$

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = H_0 \psi(t) + e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0} \partial_t \psi_I(t)\, i\hbar$$
$$\|$$
$$(H_0 + V(t))\psi(t)$$

$\Rightarrow i\hbar \partial_t \psi_I(t) = V_I(t)\psi_I(t)$ mit $V_I(t) = e^{it\frac{H_0}{\hbar}} V(t) e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}$

4. $\vec{\pi}\times\vec{\pi} = \underbrace{\vec{p}\times\vec{p} + e^2\vec{A}\times\vec{A}}_{}\, - e(\vec{p}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{p})$

$= 0$, da alle Komponenten von $\vec{p}$ miteinander kommutieren.

$$\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \rightsquigarrow \vec{p}\times\vec{A}\,\psi = \frac{\hbar}{i}\Big[\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{B}}\psi - \vec{A}\times\vec{\nabla}\psi\Big]$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\pi}\times\vec{\pi} = -e\frac{\hbar}{i}\vec{B}}}$$

5. $|\psi_{Ges}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle|\phi\rangle + |\phi\rangle|\psi\rangle\right)$

Aufg. 2

1. $$W = \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \underbrace{\left(\bar{u}(p_1,\lambda_1)\gamma_5 v(p_2,\lambda_2)\right)^*}_{} \bar{u}(p_1,\lambda_1)\gamma_5 v(p_2,\lambda_2)$$

$$= v^+ \gamma_5^+ \bar{u}^+$$

$$= \bar{v}\gamma^0\gamma_5\gamma_0 u$$

$$= -\bar{v}\gamma_5 u$$

$$= -\sum_{\lambda_1,\lambda_2} \bar{v}(p_2,\lambda_2)\gamma_5 u(p_1,\lambda_1)\bar{u}(p_1,\lambda_1)\gamma_5 v(p_2,\lambda_2)$$

② $W = -\mathrm{Tr}\left\{ (\not{p}_2 - m)\gamma_5 (\not{p}_1 + m)\gamma_5 \right\}$

$$= -\mathrm{Tr}\{\not{p}_2 \underbrace{\gamma_5 \not{p}_1}_{-\not{p}_1\gamma_5} \gamma_5\} + \mathrm{Tr}\{\underbrace{\gamma_5\gamma_5}_{\mathbb{1}}\} m^2 + \underbrace{\mathrm{Tr}\{\text{ungerade \# } \gamma\text{-Matrizen}\}}_{=0}$$

$$= \mathrm{Tr}\{\not{p}_2 \not{p}_1\} + 4m^2$$

$$= 4\, p_2 \cdot p_1 + 4m^2$$

Aufg. 3

① $0 = (i\not{\partial} - m)\psi$

$$\not{\partial} = \partial_0\gamma_0 - \partial_i\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 - \sigma_i\partial_i \\ \partial_0 + \sigma_i\partial_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}$$

mit $m=0$ und $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ folgt

$$0 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \sigma^\mu\partial_\mu\psi_- \\ \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_+ \end{pmatrix}$$

② $0 = (\not{p} - m)u = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}\right] u$

$\underline{p_0 > 0}$: $p_0 = m \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -m & 0 & m & 0 \\ 0 & -m & 0 & m \\ m & 0 & -m & 0 \\ 0 & m & 0 & -m \end{pmatrix} u = 0$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{p_0 < 0}$: $p_0 = -m \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -m & 0 & -m & 0 \\ 0 & -m & 0 & -m \\ -m & 0 & -m & 0 \\ 0 & -m & 0 & -m \end{pmatrix} u = 0$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. $\underline{p_0 > 0}$: $p_0 = \sqrt{m^2 + p_3^2} \Rightarrow m = \sqrt{p_0^2 - p_3^2}$

$$\not{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 \\ p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \\ -p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\not{p} - m) u = \begin{pmatrix} -m & 0 & p_0 - p_3 & 0 \\ 0 & -m & 0 & p_0 + p_3 \\ p_0 + p_3 & 0 & -m & 0 \\ 0 & p_0 - p_3 & 0 & -m \end{pmatrix} u$$

mit $x = \sqrt{p_0 + p_3}$, $y = \sqrt{p_0 - p_3}$ folgt $m = xy$

$$p_0 + p_3 = x^2$$
$$p_0 - p_3 = y^2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -xy & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & -xy & 0 & x^2 \\ x^2 & 0 & -xy & 0 \\ 0 & y^2 & 0 & -xy \end{pmatrix} u = 0$$

$$\rightsquigarrow u_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{=\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}} ; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

<u>Aufg. 4</u>

1. $$\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega |f|^2 = 2\pi \int d\cos\theta\, |f|^2$$

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{k}\left[P_0(\cos\theta)\, e^{i\delta_0} \sin\delta_0 + 3\, P_1(\cos\theta)\, e^{i\delta_1} \sin\delta_1\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_{tot} = 2\pi \int d\cos\theta \frac{1}{k^2}\left[P_0^2(\cos\theta) \sin^2\delta_0 + 9\, P_1^2(\cos\theta) \sin^2\delta_1\right]$$

$$\underbrace{+ \text{"} P_0 P_1 \text{"} + \text{"} P_1 P_0 \text{"}}_{=0 \text{ wg. Orthogonalität.}}$$

$$= \frac{2\pi}{k^2}\left[\sin^2\delta_0 \cdot 2 + \underbrace{9\,\frac{2}{3}}_{6} \sin^2\delta_1\right] = \frac{4\pi}{k^2}\left[\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1\right]$$

$$\frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(\theta=0) = \frac{4\pi}{k^2}\Big[\underbrace{P_0(\cos\theta)}_{1}\sin^2\delta_0 + 3\,P_1(\cos\theta)\sin^2\delta_1\Big]$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\left[\sin^2\delta_0 + 3\sin^2\delta_1\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(\theta=0)$$

(2.) Das Streupotential ist anziehend, da $\delta_0 > 0$.

(3.)

$$\vec{L}^2 P_0 = 0\,, \quad \vec{L}^2 P_1 = \hbar^2(1+1)1 P_1 = 2\hbar^2 P_1$$

$$\langle \vec{L}^2\rangle = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\theta\; r^2 f^*(\theta,\varphi)\, g^*(r)\frac{1}{r^2}\vec{L}^2 f(\theta,\varphi) g(r)$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^\infty dr\, |g(r)|^2\, 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, f^*(\theta,\varphi)\left[\hbar^2\cdot 2\cdot 3\, P_1\, e^{i\delta_1}\sin\delta_1\right]$$

$$= 6\hbar^2 (2\pi)\frac{1}{k^2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\; 3\,P_1(\cos\theta)\, e^{-i\delta_1}\sin\delta_1\left[P_1(\cos\theta)\, e^{i\delta_1}\sin\delta_1\right]$$

$$= 36\hbar^2\sin^2\delta_1\frac{1}{k^2}\frac{2\pi}{3} = 24\pi\frac{\hbar^2}{k^2}\sin^2\delta_1$$