KIT **WS 2016/17**

Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 1

17. Februar 2017, 08:30-10:30 Uhr

Name

Matrikelnummer *Code für Ergebnisse*

Aufgabe	Punkte	Zeichen
1	/ 13	
2	/ 8	
3	/ 14	
4	/ 5	
$\sum$	/ 40	

Hinweise

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Neue Aufgabe bitte auf neuer Seite anfangen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

Formelsammlung

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ , \qquad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ .$$

Orts- und Impulsoperator des harmonischen Oszillators:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)\ , \qquad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right)\ .$$

Leiteroperatoren auf Drehimpulseigenzustände:

$$J_\pm\,|j\,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j\,m{\pm}1\rangle\ .$$

Dirac-Gamma-Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\,, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0\,.$$

Bilineare Kovarianten:

Bilineare Dichten der Form $\bar{\psi}\Gamma\psi$ mit einer beliebigen 4×4-Matrix Γ lassen sich als Linearkombination der bilinearen Kovarianten $\bar{\psi}\Gamma^n\psi$ schreiben. Dabei sind die Γ^n:

$$\Gamma^S = \mathbb{1}_4\,, \qquad \Gamma^P = \gamma^5\,,$$

$$\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu\,, \qquad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma^5\,, \qquad \mu = 0\ldots 3\,,$$

$$\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\,, \qquad \mu,\nu = 0\ldots 3\,, \quad \mu < \nu\,.$$

Aufgabe 1: Störung zum zweidimensionalen harmonischen Oszillator
(*2+7+4=13 Punkte*)

Betrachten Sie einen isotropen harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) .$$

(a) Was sind die drei niedrigsten Eigenwerte von H? Wie sind diese entartet?

Dieser erhält nun eine Störung durch den Term

$$V = 4\delta\,\frac{m^2\omega^3}{\hbar}\,x^4 .$$

Darin ist δ ein kleiner, dimensionsloser Parameter.

(b) Berechnen Sie das Matrixelement $\langle n_x, n_y|\, V\, |n_x, n_y\rangle$.

(c) Bestimmen Sie für jedes der drei niedrigsten Energieniveaus aus (a) die Energieeigenzustände in nullter und die dazugehörigen Energien in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 2: Zeitabhängiges Potential (*3+5=8 Punkte*)

Ein Drei-Niveau-System ist im ungestörten Zustand gegeben durch H_0. Zur Zeit $t = 0$ wird eine konstante Störung V eingeschaltet und zur Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ wieder ausgeschaltet. Diese haben die Form

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \qquad V = \begin{cases} \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} & \text{für } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} , \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Dabei sind a, b kleine, reelle, dimensionslose Parameter.
Zur Zeit $t = -\infty$ befinde sich das System im Grundzustand.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im energetisch höchsten Zustand zu finden, in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im energetisch mittleren Zustand zu finden, in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 3: Spin-$\frac{3}{2}$-Fermionen (*2+2+10=14 Punkte*)

In einem Neon-Atom (Z=10) werden alle Elektronen durch (identische) hypothetische Teilchen ersetzt. Diese besitzen Spin $\frac{3}{2}$, alle anderen Eigenschaften sind identisch zu Elektronen. Sie gehorchen also insbesondere auch der Fermi-Dirac-Statistik.

(a) Im normalen Neon-Atom lauten die Besetzungszahlen der drei niedrigsten Energieniveaus im Grundzustand:

1s	2s	2p
2	2	6

.

Wie sind die Energieniveaus im Grundzustand nach dem Austausch durch Spin-$\frac{3}{2}$-Teilchen nun besetzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nun entfernen wir aus der Atomhülle alle Teilchen bis auf eines. Den Bahndrehimpuls des verbliebenen Teilchens bestimmen wir als $\ell = 1$.

(b) Welche Messergebnisse für den Gesamtdrehimpuls j und dessen z-Komponente m_j sind möglich?

(c) Geben Sie die zugehörigen Zustände des Systems, $|j;\, m_j\rangle$, für positives m_j in der Basis $|m_\ell\, m_s\rangle := |\ell\, m_\ell\rangle \otimes |s\, m_s\rangle$ an. Berechnen Sie die dafür notwendigen Clebsch-Gordan-Koeffizienten explizit. Beachten Sie dabei die Condon-Shortley-Konvention.

Aufgabe 4: Lorentz-Transformation von Bilinearen (*3+2=5 Punkte*)

Gegeben sei das Matrixelement $M(x) = \psi^\dagger(x)\, \gamma^3\gamma^5\, \psi(x)$.

(a) Schreiben Sie das Matrixelement als Linearkombination von Fermion-Bilinearen, $\bar{\psi}\Gamma^n\psi$. *(Definition der Γ^n s. Formelsammlung auf S. 2.)*

(b) Ein Beobachter in einem Bezugssystem, das sich relativ dazu mit Geschwindigkeit v in x^1-Richtung bewegt, betrachtet ebenfalls dieses Matrixelement, $M'(x')$.
Welches Ergebnis erhält dieser, und welche zusätzlichen Matrixelemente müssen deshalb vom ursprünglichen Bezugssystem bekannt sein? Geben Sie das Ergebnis ebenfalls wieder als Linearkombination von Fermion-Bilinearen im ursprünglichen Bezugssystem an.

Viel Erfolg!