## Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

# Klausur 1 – Lösung

### 17. Februar 2017, 08:30-10:30 Uhr

**Aufgabe 1: Störung zum zweidimensionalen harmonischen Oszillator**
(*2+7+4=13 Punkte*)

(a) Die gegebene Hamiltonfunktion lässt sich in zwei eindimensionale harmonische Oszillatoren separieren, mit Eigenzuständen $|n_x, n_y\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle$. Für diese gilt

$$\begin{aligned} E_{n_x,n_y} &= \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2}) \\ &= \hbar\omega(n_x + n_y + 1)\,. \end{aligned}$$

Mit $n = n_x + n_y$ folgt

| | Energie | Eigenzustände | Entartungsgrad |
|---|---|---|---|
| $n = 0$ | $E_0 = \hbar\omega$ | $\|0,0\rangle$ | nicht entartet |
| $n = 1$ | $E_1 = 2\hbar\omega$ | $\|1,0\rangle$, $\|0,1\rangle$ | 2-fach entartet |
| $n = 2$ | $E_0 = 3\hbar\omega$ | $\|2,0\rangle$, $\|1,1\rangle$, $\|0,2\rangle$ | 3-fach entartet . |

(b) Hierzu drücken wir zunächst den Störterm durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus:

$$\begin{aligned} \langle n_x, n_y|\, V\, |n_x, n_y\rangle &= \langle n_x, n_y|\, 4\delta \frac{m^2\omega^3}{\hbar} x^4 \,|n_x, n_y\rangle \\ &= \hbar\omega\delta\, \langle n_x, n_y|\, (a_x + a_x^\dagger)^4 \,|n_x, n_y\rangle \ . \end{aligned}$$

Berechne zunächst

$$\begin{aligned} (a_x + a_x^\dagger)^2 \,|n_x, n_y\rangle &= \left(a_x^2 + \underbrace{a_x a_x^\dagger}_{=n_x+1} + \underbrace{a_x^\dagger a_x}_{=n_x} + (a_x^\dagger)^2\right) |n_x, n_y\rangle \\ &= \left(a_x^2 + (a_x^\dagger)^2 + 2n_x + 1\right) |n_x, n_y\rangle \ . \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck müssen wir nun quadrieren. Da rechts und links dieselben Zustände stehen, können außerdem Terme, die eine unterschiedliche Anzahl von Auf- und

Absteigeoperatoren enthalten, sofort weggelassen werden.

$$\begin{aligned}
\langle n_x, n_y | V | n_x, n_y \rangle &= \hbar\omega\delta \, \langle n_x, n_y | \left( (a_x^\dagger)^2 a_x^2 + a_x^2 (a_x^\dagger)^2 + (2n_x + 1)^2 \right) | n_x, n_y \rangle \\
&= \hbar\omega\delta \left( n_x(n_x - 1) + (n_x + 1)(n_x + 2) + (2n_x + 1)^2 \right) \\
&= \hbar\omega\delta \left( 6n_x^2 + 6n_x + 3 \right)
\end{aligned}$$

(c)

- $n = 0$:
  Dieser Zustand ist nicht entartet, es reicht also die normale Formel für zeitunabhängige, nicht-entartete Störungstheorie:

  $$E_0^1 = \langle 0, 0 | V | 0, 0 \rangle \overset{(b)}{=} \hbar\omega\delta \cdot 3 \,.$$

  Damit ergibt sich für Energieeigenzustände und Energien:

  $$|0, 0\rangle : E_0 = \hbar\omega \, (1 + 3\delta)$$

- $n = 1$:
  Aufgrund der zweifachen Entartung benötigen wir nun Störungstheorie für zeitunabhängige, entartete Zustände. Da der Störterm nicht von $y$ abhängt, können die Matrixelemente nur dann nichtverschwindende Beiträge geben, wenn die $y$-Komponente des Energieeigenzustands gleich bleibt. Die benötigten Matrixelemente sind

  $$\begin{aligned}
  &\langle 1, 0 | V | 1, 0 \rangle = \hbar\omega\delta \, (6 + 6 + 3) = 15 \, \hbar\omega\delta \\
  &\langle 0, 1 | V | 0, 1 \rangle = 3 \, \hbar\omega\delta \\
  &\langle 0, 1 | V | 1, 0 \rangle = \langle 1, 0 | V | 0, 1 \rangle = 0
  \end{aligned}$$

  Die Nichtdiagonalelemente verschwinden also. Damit lassen sich die Energieeigenzustände und Energien direkt ablesen:

  $$\begin{aligned}
  |0, 1\rangle &: E_{1,1} = \hbar\omega \, (2 + 3\delta) \\
  |1, 0\rangle &: E_{1,2} = \hbar\omega \, (2 + 15\delta) \,.
  \end{aligned}$$

- $n = 2$:
  Hier erhalten wir nun für die nichtverschwindenden Matrixelemente

  $$\begin{aligned}
  &\langle 2, 0 | V | 2, 0 \rangle = \hbar\omega\delta \, (24 + 12 + 3) = 39 \, \hbar\omega\delta \\
  &\langle 1, 1 | V | 1, 1 \rangle = 15 \, \hbar\omega\delta \\
  &\langle 0, 2 | V | 0, 2 \rangle = 3 \, \hbar\omega\delta \,.
  \end{aligned}$$

Auch hier sind alle Nichtdiagonalelemente Null und das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
|0, 2\rangle &: E_{2,1} = \hbar\omega \, (3 + 3\delta) \\
|1, 1\rangle &: E_{2,2} = \hbar\omega \, (3 + 15\delta) \\
|2, 0\rangle &: E_{2,3} = \hbar\omega \, (3 + 39\delta) \,.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 2: Zeitabhängiges Potential** (*3+5=8 Punkte*)

Im folgenden bezeichnen wir den Grundzustand mit Index 1, den mittleren mit Index 2 und den energetisch höchsten Zustand mit Index 3.

(a) Die nullte Ordnung Störungstheorie, $c_3^{(0)} = \delta_{31} = 0$, verschwindet.
In erster Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} c_3^{(1)} &= \frac{-i}{\hbar} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t' \, \underbrace{\langle 3| V |1\rangle}_{=a\hbar\omega} e^{i\frac{E_3-E_1}{\hbar}t'} \\ &= \frac{-i}{\hbar} a\hbar\omega \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t' \, e^{i3\omega t'} \\ &= -ia\omega \frac{1}{i3\omega} \Big( \underbrace{e^{i3\omega\frac{\pi}{\omega}}}_{=e^{3\pi i}=-1} -1 \Big) \\ &= \frac{2}{3} a \end{aligned}$$

Also ist die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_{1\to 3} = |c_3^{(1)}|^2 = \frac{4}{9} a^2 \,.$$

(b) Die nullte Ordnung verschwindet ebenso wie die erste Ordnung, da

$$\begin{aligned} c_2^{(0)} &= \delta_{21} = 0 \,, \\ c_2^{(1)} &= \frac{-i}{\hbar} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t' \, \underbrace{\langle 2| V |1\rangle}_{=0} e^{i\frac{E_3-E_1}{\hbar}t'} = 0 \,. \end{aligned}$$

In zweiter Ordnung gilt

$$c_2^{(2)} = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t' \, e^{i\frac{E_2-E_m}{\hbar}t'} \langle 2| V |m\rangle \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' \, e^{i\frac{E_m-E_1}{\hbar}t''} \langle m| V |1\rangle \ .$$

Der einzige beitragende Term in der Summe ist $m = 3$. Mit

$$\begin{aligned} \langle 2| V |3\rangle &= b\hbar\omega \,, & \frac{E_2 - E_3}{\hbar} &= -2\omega \,, \\ \langle 3| V |1\rangle &= a\hbar\omega \,, & \frac{E_3 - E_1}{\hbar} &= 3\omega \,, \end{aligned}$$

ergibt sich

$$
\begin{aligned}
c_2^{(2)} &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 ab\hbar^2\omega^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t'\, e^{-2i\omega t'} \int_0^{t'} \mathrm{d}t''\, e^{3i\omega t''} \\
&= ab\Big(-i\omega\Big)^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t'\, e^{-2i\omega t'} \frac{1}{3i\omega} \left(e^{3i\omega t'} - 1\right) \\
&= \frac{ab}{3} i\omega \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \mathrm{d}t' \left(e^{i\omega t'} - e^{-2i\omega t'}\right) \\
&= \frac{ab}{3} i\omega \left[\frac{1}{i\omega}\left(\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} - 1\right) - \frac{1}{-2i\omega}\left(\underbrace{e^{-2i\pi}}_{=1} - 1\right)\right] \\
&= \frac{ab}{3}(-2) = -\frac{2}{3}ab\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Übergangswahrscheinlichkeit

$$
P_{1\to 2} = |c_2^{(2)}|^2 = \frac{4}{9}a^2b^2\,.
$$

**Aufgabe 3: Spin-$\frac{3}{2}$-Fermionen** (*2+2+10=14 Punkte*)

(a) Da die hypothetischen Teilchen Spin-$\frac{3}{2}$-Fermionen sind, existieren vier Möglichkeiten für die $z$-Komponente des Spins, $m_s = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$. Damit können in einem Orbital maximal 4 Teilchen untergebracht werden und die Besetzungszahlen lauten

| $1s$ | $2s$ | $2p$ |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 2 |

.

(b) Aus $\ell = 1$ und $s = \frac{3}{2}$ folgt:

- $j = |\ell - s|, \ldots, \ell + s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
- $m_j = -j, \ldots, j$:

  $j = \frac{5}{2}$: $m_j = \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$

  $j = \frac{3}{2}$: $m_j = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$

  $j = \frac{1}{2}$: $m_j = \pm\frac{1}{2}$

(c) Wir starten mit dem Zustand mit größtem $j$ und $m_j$:

$$
\boxed{\left|\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right\rangle = \left|1, \frac{3}{2}\right\rangle \equiv |1\,1\rangle \otimes \left|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\right\rangle}.
$$

Anwenden der Leiteroperatoren liefert

$$\frac{J_-}{\hbar}\left|\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}\left|\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{1\cdot 2-1\cdot 0}\left|0,\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{4}{35-15}}\left(\sqrt{2}\left|0,\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{15-3}{4}}\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\boxed{\left|\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|0,\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle}$$

$$\left|\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{8}}\left[\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{2}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{3}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle\right) + \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\sqrt{2}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{4}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$\boxed{\left|\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle}.$$

Zustände zu verschiedenem $j$ und gleichem $m_j$ stehen senkrecht aufeinander. Mit der Interpretation der Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu $\left|\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$ und $\left|\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$ als $2\times 2$-Drehmatrix lässt sich direkt ablesen

$$\boxed{\left|\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\left|0,\frac{3}{2}\right\rangle},$$

wobei das globale Vorzeichen aus der Condon-Shortley-Konvention folgt.
Anwenden des Leiteroperators liefert

$$\left|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left[\sqrt{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{2}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{4}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle\right) - \sqrt{\frac{3}{5}}\left(\sqrt{2}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{3}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$\boxed{\left|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{8}{15}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{15}}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle}.$$

Der Zustand $\left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$ muss auf $\left|\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$ und $\left|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$ senkrecht stehen. Dies lässt sich am einfachsten über das Kreuzprodukt berechnen:
(Reihenfolge der Zustände von oben nach unten: $\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle$, $\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle$)

$$\sqrt{\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{1}{15}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{6}\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\ -1\\ -\sqrt{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{150}}\begin{pmatrix}-5\\ 5\sqrt{2}\\ 5\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle = \underbrace{+}_{\text{C-S}}\frac{1}{\sqrt{6}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-1,\frac{3}{2}\right\rangle}.$$

**Aufgabe 4: Lorentz-Transformation von Bilinearen** (*3+2=5 Punkte*)

(a) Wir schreiben das Matrixelement folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} M &= \psi^\dagger\gamma^3\gamma^5\psi \\ &\overset{\{\gamma^\mu,\gamma^5\}=0}{=} -\psi^\dagger\gamma^5\gamma^3\psi \\ &= -i\underbrace{\psi^\dagger\gamma^0}_{=\bar\psi}\gamma^1\gamma^2\underbrace{\gamma^3\gamma^3}_{=g^{33}=-1}\psi \\ &= i\bar\psi\gamma^1\gamma^2\psi \\ &= \bar\psi\Gamma^T_{12}\psi\,. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir benutzt

$$\begin{aligned} \Gamma^T_{12} &= \frac{i}{2}[\gamma_1,\gamma_2] \\ &= \frac{i}{2}g_{11}g_{22}\left(\gamma^1\gamma^2-\gamma^2\gamma^1\right) \\ &= \frac{i}{2}\cdot 2\gamma^1\gamma^2 \\ &= i\gamma^1\gamma^2\,. \end{aligned}$$

(b) Die Lorentztransformation für einen Boost in $x$-Richtung ist gegeben durch

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \beta=\frac{v}{c} \text{ und } \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

$\bar\psi\Gamma^T_{\mu\nu}\psi$ transformiert sich wie ein Lorentz-Tensor 2. Stufe, also

$$\begin{aligned} M' &= \Lambda_1{}^\mu\Lambda_2{}^\nu\bar\psi\Gamma^T_{\mu\nu}\psi \\ &= \beta\gamma\bar\psi\Gamma^T_{02}\psi + \gamma\bar\psi\Gamma^T_{12}\psi \\ &= \gamma\left(\bar\psi\Gamma^T_{12}\psi + \beta\bar\psi\Gamma^T_{02}\psi\right) \\ &= \gamma\left(\bar\psi\Gamma^{T,12}\psi - \beta\bar\psi\Gamma^{T,02}\psi\right)\,. \end{aligned}$$

Zusätzlich ist also das Matrixelement $\bar\psi\Gamma^T_{02}\psi$ notwendig.