KIT **WS 2016/17**

Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 2

04. April 2017, 11:00-13:00 Uhr

Name

Matrikelnummer *Code für Ergebnisse*

Aufgabe	Punkte	Zeichen
1	/ 12	
2	/ 15	
3	/ 6	
4	/ 12	
$\sum$	/ 45	

Hinweise

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Neue Aufgabe bitte auf neuer Seite anfangen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

Formelsammlung

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ , \qquad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ .$$

Orts- und Impulsoperator des harmonischen Oszillators:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)\ , \qquad p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right)\ .$$

Leiteroperatoren auf Drehimpulseigenzustände:

$$J_\pm\,|j\,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j\,m{\pm}1\rangle\ .$$

Dirac-Gamma-Matrizen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,, \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0\,.$$

Bilineare Kovarianten:

Bilineare Dichten der Form $\bar{\psi}\Gamma\psi$ mit einer beliebigen 4×4-Matrix Γ lassen sich als Linearkombination der bilinearen Kovarianten $\bar{\psi}\Gamma^n\psi$ schreiben. Dabei sind die Γ^n:

$$\Gamma^S = \mathbb{1}_4\,, \qquad \Gamma^P = \gamma^5\,,$$

$$\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu\,, \qquad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma^5\,, \qquad \mu = 0\ldots 3\,,$$

$$\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\,, \qquad \mu,\nu = 0\ldots 3\,, \quad \mu < \nu\,.$$

Aufgabe 1: Störung zum zweidimensionalen harmonischen Oszillator

(*2+3+7=12 Punkte*)

Betrachten Sie einen isotropen harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen,

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) .$$

(a) Was sind die vier niedrigsten Eigenwerte von H? Wie ist ihre jeweilige Entartung?

Dieser erhält nun eine Störung durch den Term

$$V = \delta\,\omega\,(xp_y - yp_x)\,.$$

Darin ist δ ein kleiner, dimensionsloser Parameter.

(b) Berechnen Sie das Matrixelement $\left\langle n_x', n_y' \right| V \left| n_x, n_y \right\rangle$.

(c) Bestimmen Sie für die beiden niedrigsten Energieniveaus aus (a) die Energieeigenzustände in nullter und die dazugehörigen Energien in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator mit räumlich konstanter Kraft

(*6+7+2=15 Punkte*)

Zur Zeit $t < 0$ befindet sich ein eindimensionaler harmonischer Oszillator in seinem Grundzustand. Für $t \geq 0$ wirkt auf ihn eine zeitabhängige, räumlich konstante Kraft

$$F(t) = F_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

mit einer Konstanten $\tau > 0$.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im ersten angeregten Zustand zu finden, in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im zweiten angeregten Zustand zu finden, in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

(c) In welcher Ordnung Störungstheorie tritt allgemein der erste nichtverschwindende Beitrag für den Übergang vom Grundzustand in den n-ten angeregten Zustand auf? Geben Sie auch eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Identische Teilchen im Dreieck (*4+2=6 Punkte*)

Wir betrachten ein System aus drei identischen Teilchen, die sich ohne weitere Wechselwirkungen an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks befinden. Durch den Mittelpunkt, senkrecht zur Ebene des Dreiecks verlaufe die z-Achse, um die sich das Dreieck frei drehen lässt. Die Eigenwerte der z-Komponente des Bahndrehimpulses, L_z, werden wie üblich mit m charakterisiert.

(a) Welche Konsequenzen für m hat die Drehsymmetrie bei drei Bosonen?

(b) Welche sind es für drei Fermionen?

Die Spinwellenfunktion sei hier symmetrisch unter Austausch der Teilchen.

Aufgabe 4: Strom von Dirac-Teilchen (*12 Punkte*)

Ein Dirac-Fermion mit Masse m und Impuls $\vec{p}$ besitze die Wellenfunktion

$$\psi(x) = e^{-i\frac{p\cdot x}{\hbar}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den zugehörigen Strom $j^\mu(x) = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$.

Viel Erfolg!