Aufgabe 1: Unabhängige Fragen **20 Punkte**

Diese Aufgabe besteht aus Einzelfragen, die unabhängig voneinander beantwortet werden können.

(a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass $[J_i, \vec{J}^2] = 0$ für einen allgemeinen Drehimpulsoperator $\vec{J}$ gilt.

(b) $\boxed{3\text{ pt}}$ Benennen Sie die drei Terme, die die Feinstruktur erzeugen und beschreiben Sie kurz für jeden Term dessen physikalischen Ursprung.

(c) $\boxed{2\text{ pt}}$ Geben Sie den Hamiltonoperator an, der ein Spin-0 Teilchen mit Ladung q und Masse m in einem externen elektromagnetischen Feld beschreibt, wobei das Feld durch die Potentiale $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ bestimmt wird.

(d) $\boxed{1\text{ pt}}$ Gegeben sei ein System von drei ununterscheidbaren Spin-1/2 Teilchen, das durch eine Wellenfunktion $\psi(1,2,3)$ beschrieben wird. Welche Beziehung gilt zwischen der Wellenfunktion $\psi(2,3,1)$ und der ursprünglichen Wellenfunktion $\psi(1,2,3)$?

(e) $\boxed{1\text{ pt}}$ Warum kann die Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m^2}\vec{\partial}^2\psi$ nicht die relativistische Dynamik eines freien Teilchens beschreiben?

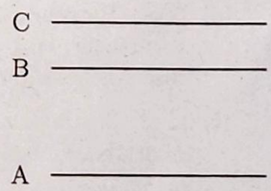
(f) $\boxed{2\text{ pt}}$ Geben Sie die Formel für Fermis goldene Regel an.

(g) $\boxed{1\text{ pt}}$ Im Experiment zum Aharonov-Bohm-Effekt wird eine Spule vor einem Doppelspalt platziert. Elektronen fliegen durch den Doppelspalt und an der Spule vorbei und werden anschließend auf einem Schirm detektiert. Was ist der Grund für die beobachtete Verschiebung des Interferenzmusters, wenn die Spule angeschaltet wird?

1. Das Magnetfeld außerhalb der Spule dämpft die Wellenfunktion der Elektronen.
2. Das elektrische Feld in der Spule verschiebt die Energieniveaus der Elektronen.
3. Das elektromagnetische Potential außerhalb der Spule verursacht eine Phasenverschiebung der Wellenfunktion der Elektronen.
4. Durch den Strom in der Spule werden zusätzliche Elektronen emittiert, die mit den Elektronen, die durch den Doppelspalt kommen, interferieren.

(h) $\boxed{3\text{ pt}}$ Welche Forderungen führen zur Dirac-Gleichung?

(i) $\boxed{2\text{ pt}}$ Ein Laser enthält ein aktives Medium, dessen Atome Energieniveaus besitzen, die typischerweise wie in der Skizze aussehen, wobei für die Energien $E_A < E_B < E_C$ gilt. Übertragen Sie die Skizze und zeichnen Sie die Übergänge ein, die für einen Laser nötig sind. Welche Beziehungen müssen die Übergangsraten zwischen den Niveaus erfüllen?



(j) $\boxed{3\text{ pt}}$ Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

1. $\langle l = 1, m = 1 |\, \vec{p}^2 \,| l = 2, m = 1\rangle = 0$
2. $\langle l = 1, m = 1 |\, \vec{r} \,| l = 2, m = 0\rangle = \vec{0}$
3. $\langle l = 0, m = 1 |\, r_i p_j \,| l = 2, m = 1\rangle = 0_{ij}$

Aufgabe 2: Stark-Effekt im Wasserstoffatom **20 Punkte**

Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem zeitunabhängigen homogenen externen elektrischen Feld $\vec{E}_0$, welches entlang der z-Achse ausgerichtet ist. Das System wird durch den Hamilton-Operator $H = H_0 + V$ beschrieben, wobei

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\,, \quad \text{und} \quad V = eE_0 z\,. \tag{1}$$

Die Wirkung von V wird durch zeitunabhängige Störungstheorie beschrieben. Spinfreiheitsgrade werden in dieser Aufgabe nicht betrachtet.

(a) $\boxed{3\text{ pt}}$ Bestimmen Sie die Kommutatoren $\left[L^2, H\right]$ und $\left[L_z, H\right]$. Welche Quantenzahl(en) haben die Eigenzustände von H_0 und H gemeinsam?

(b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Experimentell kann festgestellt werden, dass die Änderung der Grundzustandsenergie von Wasserstoff quadratisch in E_0 ist. Erklären Sie dieses Phänomen.

Die vier ungestörten Zustände für das erste angeregte Energieniveau von Wasserstoff sind

$$\begin{aligned} |1\rangle &\equiv |200\rangle\,, \\ |2\rangle &\equiv |210\rangle\,, \\ |3\rangle &\equiv |211\rangle\,, \\ |4\rangle &\equiv |21\text{-}1\rangle\,, \end{aligned} \tag{2}$$

welche alle die gleiche Energie $E^{(0)}$ (in nullter Ordnung) haben. Die Energiekorrekturen erster Ordnung $E^{(1)}$ und Energieeigenzustände nullter Ordnung $|1\rangle_V, \ldots, |4\rangle_V$ in Anwesenheit der Störung V werden bestimmt, indem man die 4×4 Matrix mit den Elementen $M_{ij} = \langle i|\,V\,|j\rangle$ diagonalisiert.

(c) $\boxed{3\text{ pt}}$ Werten Sie $\langle 2\,l'\,m'|\left[V, L_z\right]|2\,l\,m\rangle$ aus und verwenden Sie das Ergebnis, um zu argumentieren, dass gewisse Matrixelemente M_{ij} verschwinden. Verwenden Sie Parität als Argument dafür, dass noch weitere Matrixelemente verschwinden. Geben Sie an, welches der zwei Argumente für welches Matrixelement gültig ist.

X (d) $\boxed{3\text{ pt}}$ Bestimmen Sie das Matrixelement $M_{12} = \langle 1|V|2\rangle \equiv \langle 200|V|210\rangle$. Drücken Sie das Ergebnis durch e, E_0 und den Bohrradius a_0 aus.

(e) $\boxed{3\text{ pt}}$ Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung, welche durch V verursacht wird. Wenn Sie Aufgabenteil (d) nicht gelöst haben, drücken Sie ihre Antwort durch Matrixelemente M_{ij} aus.

(f) $\boxed{4\text{ pt}}$ Bestimmen Sie die Energieeigenzustände nullter Ordnung $|1\rangle_V, |2\rangle_V, |3\rangle_V$ und $|4\rangle_V$. Geben Sie an, welcher Zustand zu welcher Energiekorrektur gehört.

(g) $\boxed{2\text{ pt}}$ Von welchen der ungestörten Zustände $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle$ aus ist ein elektrischer Dipolübergang zum Grundzustand $|100\rangle$ möglich? Und von welchen der gestörten Zustände $|1\rangle_V, |2\rangle_V, |3\rangle_V, |4\rangle_V$ aus ist ein elektrischer Dipolübergang zum Grundzustand $|100\rangle$ möglich? Begründen Sie ihre Antwort.
Wenn Sie Aufgabenteil (f) nicht gelöst haben, stellen Sie eine Vermutung an für die Beziehung zwischen den gestörten und ungestörten Zuständen und geben Sie klar an, welcher Zustand $|1\rangle_V$ ist, welcher $|2\rangle_V$ ist usw.

18/19?

Aufgabe 3: Bornsche Näherung und Hochenergiestreuung 17 Punkte

Betrachten Sie das Potential

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} -U_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad , \qquad U_0 > 0.$$

(a) $\boxed{4\text{ pt}}$ Die Streuamplitude in der Bornschen Näherung ist gegeben durch

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} U(\vec{r}),$$

wobei $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ ist und $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ die Wellenvektoren der einfallenden bzw. gestreuten Wellen sind. Berechnen Sie die Amplitude $f(\theta)$ für Streuung am oben angegebenen Potential $U(\vec{r})$ in der Bornschen Näherung. Drücken Sie ihr Resultat durch $q(\theta)$ aus.

(b) $\boxed{4\text{ pt}}$ Berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt $\sigma(k)$ in der Bornschen Näherung. Das folgende Integral kann dabei nützlich sein:

$$\int_0^{2k} \mathrm{d}q\, q \frac{\left(\sin(qR) - qR\cos(qR)\right)^2}{(qR)^6} = \frac{1}{4R^2}\left(1 - \frac{1}{4(kR)^2} + \frac{\sin(4kR)}{8(kR)^3} - \frac{\sin(2kR)^2}{16(kR)^4}\right).$$

Für Streuung bei sehr hohen Energien kann die Streuamplitude als

$$f(\theta) = -\frac{ik}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp\cdot\vec{\rho}} \left(e^{-\frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\, U(z\vec{e}_z+\vec{\rho})} - 1\right),$$

geschrieben werden, wobei $|\vec{q}_\perp| \sim k\sin(\theta)$ gilt und wir $\vec{r} = z\vec{e}_z + \vec{\rho}$ geschrieben haben mit $\vec{e}_z \cdot \vec{\rho} = 0$ und $\vec{r}^2 = z^2 + \vec{\rho}^2$.

(c) $\boxed{3\text{ pt}}$ Berechnen Sie die Phase $-\frac{im}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\, U(z\vec{e}_z + \vec{\rho})$.

(d) $\boxed{5\text{ pt}}$ Verwenden Sie das optische Theorem um im Grenzfall von schwachen Potentialen, $\frac{U_0 R m}{\hbar^2 k} \ll 1$, einen Ausdruck für den totalen Streuquerschnitt zu bestimmen.

(e) $\boxed{1\text{ pt}}$ Vergleichen Sie Ihr Resultat aus (d) für den totalen Streuquerschnitt mit dem Resultat aus (b) im Grenzfall $kR \gg 1$. 14

Aufgabe 4: Zeitabhängige Störungstheorie 18 Punkte

Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse M zwischen zwei unendlich hohen Potentialwällen, welche sich bei $x = 0$ und $x = D$ befinden. Zwischen den zwei Wällen verschwindet das Potential, sodass die Wellenfunktion und die Energie des Teilchens durch

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{D}} \sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2MD^2}.$$

gegeben sind.

Der Potentialwall bei $x = D$ verschiebt sich nun langsam (adiabatisch) zu einem neuen Ort $x = 2D$.

(a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Was passiert mit den Energieeigenzuständen in der Zeit, in der sich der Wall bewegt?

(b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Vor der Verschiebung des Walls befindet sich das Teilchen im Grundzustand. Berechnen Sie die Differenz der Energie des Teilchens vor und nach der Verschiebung des Walls.

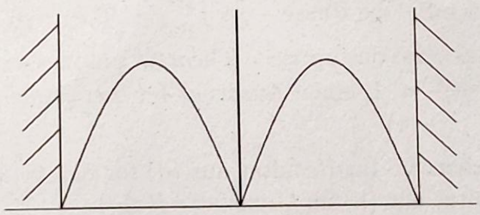
Ausgehend von der ursprünglichen Aufstellung verschiebt sich der Wall bei $x = D$ nun auf plötzlicher Art und Weise zum neuen Ort $x = 2D$. Wir bezeichnen die neuen Energieeigenzustände dieses Systems mit $\psi'_n(x)$. Vor der Verschiebung des Walls befindet sich das Teilchen wiederum im Grundzustand.

(c) $\boxed{2\text{ pt}}$ Skizzieren Sie die Wellenfunktion des Teilchens im Bereich $0 \leq x \leq 2D$ unmittelbar nach der Verschiebung des Walls.

(d) $\boxed{2\text{ pt}}$ Beschreiben Sie in Worten die Beziehung zwischen der Wellenfunktion des Teilchens und den Energieeigenzuständen ψ'_n unmittelbar nach der Verschiebung des Walls.

(e) $\boxed{4\text{ pt}}$ Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen unmittelbar nach der Verschiebung des Walls im Grundzustand ψ'_1 zu finden.

Betrachten Sie nun eine neue Aufstellung mit zwei unendlich hohen Potentialwällen bei $x = 0$ beziehungsweise bei $x = 2D$, und einer dünnen und unendlich hohen Potentialbarriere bei $x = D$. Betrachten Sie ferner zwei ungeladene Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, wobei sich das eine Teilchen zwischen dem ersten Wall und der Potentialbarriere und das andere zwischen der Potentialbarriere und dem zweiten Wall befindet. Beide Teilchen befinden sich im Grundzustand und haben Spin "up". Die Potentialbarriere bei $x = D$ wird nun auf plötzliche Art und Weise ausgeschaltet.



(f) $\boxed{2\text{ pt}}$ Welches ist der gemeinsame Eigenzustand mit der niedrigsten Energie, in dem sich die zwei oben beschriebenen Teilchen nach dem Ausschalten der Potentialbarriere bei $x = D$ befinden können, in Anbetracht dass die Teilchen ihren Spin beibehalten? Begründen Sie ihre Antwort.

(g) $\boxed{4\text{ pt}}$ Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, die zwei oben beschriebenen Teilchen unmittelbar nach dem Ausschalten der Potentialbarriere bei $x = D$ im Zustand aus Aufgabe (f) zu finden.

14
18
7

39