Klausur zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald **WS 20/21**

Bearbeitungsdauer:	90 Minuten	08.03.2021
Hilfsmittel:	Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.	
Wichtig:	Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.	

Nachname: ______ Gruppe: ______

Vorname: ______

Matrikelnummer: ______

A1	A2	A3	Summe

Aufgabe 1: Kurzaufgaben $5 \times 2 = 10$ Punkte

(i) p_1^μ and p_2^μ seien 4-Vektoren. Berechnen Sie die Spuren $\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_2\not{p}_1)$ und $\mathrm{Tr}(\not{p}_1\not{p}_2\not{p}_1\not{p}_2)$.

(ii) k^μ sei ein 4-Vektor und Λ eine gegebene Lorentz-Transformation. Der 4-Ortsvektor transformiert sich unter dieser Transformation wie folgt: $x'^{,\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Wie transformiert sich k^μ?

(iii) Der Spinor ψ sei Lösung der Dirac-Gleichung $(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi = 0$. Welche Gleichung erfüllt $\bar{\psi}$?

(iv) Zeigen Sie unter Verwendung des Paritätsoperators, dass das Matrixelement $\langle\psi|x|\psi\rangle$ Null ist, wobei $|\psi\rangle$ die Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ist.

(v) Betrachten Sie die vier γ-Matrizen γ^0, γ^1, γ^2, γ^3. Berechnen Sie $\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1$.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator im zeitabhängigen elektrischen Feld

$7{+}3 = 10$ Punkte

Betrachten Sie einen ein-dimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m, Ladung e und Frequenz ω in einem homogenen, elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, welches entlang der z-Achse ausgerichtet ist. Die Amplitude von E ist gegeben durch

$$E(t) \quad = \quad E_0\, e^{-t/\tau}\,.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das elektrische Feld eingeschalten. E_0 und τ sind Konstanten.

(i) Berechnen Sie zur ersten Ordnung in Störungstheorie die Übergangswahrscheinlichkeit vom ersten in den zweiten angeregten Zustand (P_{12}) im Limes großer Zeiten.

(ii) Berechnen Sie entsprechend auch die Wahrscheinlichkeit P_{13} für den Übergang vom ersten in den dritten angeregten Zustand.

Aufgabe 3: Wechselwirkung eines Elektrons mit dem elektromagnetischen Feld

2 + 1 + 3 + 4 = 10 Punkte

Betrachten Sie folgenden Hamilton-Operator

$$H = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) + m(\beta - 1)\,,$$

wobei α_i und β 4×4-Matrizen sind (siehe unten). $\vec{A}$ ist das Vektorpotential.
Es soll nun folgende unitäre Transformation durchgeführt werden

$$\tilde{H} = UHU^{-1}\,,$$

mit $U = C\beta + \vec{\alpha}\vec{p}/(2m)$ und $C = \sqrt{1 - \vec{p}^2/(4m^2)}$. $\vec{p}$ ist der Impulsoperator.

(i) Zeigen Sie, dass U unitär ist.

(ii) Entwickeln Sie U in $1/m$ und vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $1/m^3$.

(iii) Betrachten Sie nun den Term $H_m \equiv m(\beta - 1)$ und führen Sie für diesen die unitäre Transformation durch. Berechnen Sie den nicht-diagonalen Term von $\tilde{H}_m$. Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $1/m^2$. Ihr Ergebnis darf die Matrix β nicht mehr enthalten.

(iv) Der diagonale Anteil von $\tilde{H}$ enthält den Term

$$\frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\,(\vec{\sigma}\vec{p}) + (\vec{\sigma}\vec{p})\,\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\right] - \frac{\vec{p}^2}{2m}\,,$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind. Zeigen Sie, dass in diesem Ausdruck die Wechselwirkung des Elektronspins mit dem Magnetfeld enthalten ist.
Zeigen Sie, dass für den g-Faktor des Elektrons gilt $g_e = 2$.

Nützliche Formeln und Definitionen

γ-Matrizen in Dirac-Darstellung: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

Pauli Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl} + i\epsilon_{klj}\sigma_j$, $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$

Spur-Relationen: $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ und $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}$

Auf- und Absteigeoperatoren beim Harmonischer Oszillator:
$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$ mit $a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$, $a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$

Hamilton-Operator der Pauli-Gleichung: $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\vec{B}$

Harmonischer Oszillator im konstanten elektrischen Feld: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 + eEz$

Störungstheorie 1. Ordnung: $A = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar}\langle n\left|V(t')\right|m\rangle$