Klausur zur Vorlesung
Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald **WS 20/21**

Bearbeitungsdauer:	90 Minuten	22.03.2021
Hilfsmittel:	Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.	
Wichtig:	Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.	

Nachname: Gruppe:

Vorname:

Matrikelnummer:

A1	A2	A3	Summe

Aufgabe 1: Kurzaufgaben $5 \times 2 = 10$ Punkte

(i) p^μ sei ein 4-Vektor. Die Größe $\not{p}\not{p}$ ist proportional zur Einheitsmatrix. Berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor.

(ii) Betrachten Sie die vier γ-Matrizen γ^0, γ^1, γ^2, γ^3. Ist γ^μ ein 4-Vektor? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Gegeben Sei ein Operator in der Form $O = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Ist O hermitesch? Ist O unitär?

(iv) Betrachten Sie ein Helium-Atom im Grundzustand, wobei der Gesamtspin der beiden Elektronen Null ist. Wie lautet die Wellenfunktion unter der Annahme, dass die Welchselwirkung zwischen den Elektronen vernachlässigt wird?

(v) Betrachten Sie den Hamilton-Operator $H = H_0 + V$, wobei $V = \lambda x^3$ also Störung zu H_0 aufgefasst werden soll. H_0 beschreibt einen Harmonischen Oszillator. Berechnen Sie das Matrixelement $\langle n|V|m\rangle$, mit $n = 1$ und $m = 5$. $|n\rangle$ und $|m\rangle$ sind Eigenzustände von H_0.

Aufgabe 2: Tritiumzerfall $2+4+4 = 10$ Punkte

Ein Tritiumkern (^{3}H) verwandle sich (plötzlich) durch β-Zerfall in einem Heliumkern (^{3}He). Die Übergangsamplitude ist dabei gegeben durch $A = \langle {}^3\text{He}|{}^3\text{H}\rangle$.

(i) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron aus einem beliebigen Eigenzustand von (^{3}H) in einen beliebigen Eigenzustand von (^{3}He) übergeht, durch die Wellenfunktionen im Ortsraum aus. Durch welche Quantenzahlen werden die Zustände charakterisiert?

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im $2p$-Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, ebenfalls im Grundzustand des Heliumatoms gefunden wird.

Aufgabe 3: Transformation der Dirac-Gleichung

2 + 1 + 4 + 3 = 10 Punkte

Betrachten Sie folgenden Hamilton-Operator

$$H \;=\; m(\beta - 1) + \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A})\,,$$

wobei α_i und β die 4×4-Matrizen der Dirac-Gleichung sind. $\vec{A}$ ist das Vektorpotential.
Es soll nun folgende unitäre Transformation durchgeführt werden

$$\tilde{H} \;=\; UHU^{-1}\,,$$

mit $U = F\beta + \vec{\alpha}\vec{p}/(2m)$ und $F = \sqrt{1 - \vec{p}^{\,2}/(4m^2)}$. $\vec{p}$ ist der Impulsoperator.

(i) Zeigen Sie, dass U unitär ist.

(ii) Entwickeln Sie U in $1/m$ und vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $1/m^3$.

(iii) Der diagonale Anteil von $\tilde{H}$ enthält den Term

$$\frac{1}{2m}\left[(\vec{p} - e\vec{A})\vec{\sigma}\;(\vec{\sigma}\vec{p}) + (\vec{\sigma}\vec{p})\;\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\right] - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\,,$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sind. Zeigen Sie, dass in diesem Ausdruck die Wechselwirkung des Elektronspins mit dem Magnetfeld enthalten ist.
Zeigen Sie, dass für den g-Faktor des Elektrons gilt $g_e = 2$.

(iv) Betrachten Sie nun den Term $H_m \equiv m(\beta - 1)$ und führen Sie für diesen die unitäre Transformation durch. Berechnen Sie den nicht-diagonalen Term von $\tilde{H}_m$. Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $1/m^2$. Ihr Ergebnis darf die Matrix β nicht mehr enthalten.

Nützliche Formeln und Definitionen

γ-Matrizen in Dirac-Darstellung: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

Pauli Matrizen: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl} + i\epsilon_{klj}\sigma_j$, $\beta = \gamma^0$, $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$

Spur-Relationen: $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ und $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}$

Lösungen des Wasserstoffatoms: $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi)$

Radial- und Kugelflächenfunktionen:

$R_{1,0} = 2(Z/a)^{3/2}e^{-\rho}$, $R_{2,0} = (Z/2a)^{3/2}(2-\rho)e^{-\rho/2}$, $R_{2,1} = (Z/2a)^{3/2}\rho e^{-\rho/2}/\sqrt{3}$, mit $\rho = Zr/a$, $Y_{0,0} = 1/\sqrt{4\pi}$, $Y_{1,-1} = \sqrt{3/8\pi}\sin(\theta)e^{-i\phi}$, $Y_{1,0} = \sqrt{3/4\pi}\cos(\theta)$, $Y_{1,1} = -\sqrt{3/8\pi}\sin(\theta)e^{i\phi}$

Auf- und Absteigeoperatoren beim Harmonischer Oszillator:

$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right)$, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right)$ mit $a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, $a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$