Karlsruhe Institute of Technology

Wintersemester 2022/23
Theorie E - Klausur 1

1.3.2023

Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

Tragen Sie bitte leserlich Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in den dafür vorgesehenen Feldern auf der hier vorliegenden Titelseite ein und geben Sie dieses Blatt nach Beendigung der Klausur mit ab. Schreiben Sie auch auf jedes von Ihnen beschriebene Blatt leserlich Ihre Matrikelnummer.

Name: ____

Matrikelnummer: __________________________________

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt ist als Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Bitte auf dieser Seite ab hier nichts mehr ausfüllen!

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)	Summe
Punkte	/10	/8	/8	/8	/6	
Kürzel						

Aufgabe 1: Warm-up **10P**

Beantworten Sie die folgenden Fragen in wenigen Sätzen und Formeln.

(a) 2P Was lässt sich mit Hilfe der Wigner Matrizen $D^{(j)}_{mm'}$ beschreiben?

(b) 2P Was besagt das Wigner-Eckart-Theorem?

(c) 2P Was ist der (normale) Zeeman Effekt? Wie spaltet sich das Spektrum auf?

(d) 2P Was wird durch den Operator

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{|\vec{k}|\,V}} \left(a_{\vec{k},\lambda}\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a^\dagger_{\vec{k},\lambda}\vec{\epsilon}^{\,*}_\lambda(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right)$$

beschrieben? Wie lässt sich die Struktur dieses Operators anschaulich erklären?

(e) 2P Zeigen Sie, dass $\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p}$.

Aufgabe 2: Addition von Spin und Bahndrehimpuls **8P**

Wir betrachten ein Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ und Bahndrehimpuls $l = 1$. Geben Sie die möglichen Eigenzustände $|j, m_j\rangle$ der Operatoren $\vec{J}^2$ und J_z (mit $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) an und drücken Sie diese durch die Produktzustände $|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ aus.

Hinweise: Die Auf- und Absteigeoperatoren $J_\pm$ sind gegeben durch

$$J_\pm |j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle.$$

Für die Zustände mit $m_j < 0$ dürfen auch Symmetrieeigenschaften verwendet werden.

Aufgabe 3: Zeitabhängiges Potential **8P**

Ein Drei-Niveau-System ist im ungestörten Zustand gegeben durch H_0. Zur Zeit $t = 0$ wird eine konstante Störung V eingeschaltet und zur Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ wider ausgeschaltet. Diese haben die Form

$$H_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{cases} \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} & \text{für } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sind a, b kleine, reelle, dimensionslose Parameter.
Zur Zeit $t = -\infty$ befinde sich das System im Grundzustand.

(a) 3P Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im energetisch höchsten Zustand zu finden, in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

(b) 5P Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im energetisch mittleren Zustand zu finden, in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 4: Zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen $\boxed{\textbf{8P}}$

Ein System bestehend aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen und wird duch den Hamilton-Operator

$$H = a\,(S_{1,z} + S_{2,z})B + b\,(S_{1,z} - S_{2,z})B + \frac{J}{\hbar}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

beschrieben. Hierbei sind a, b, J Konstanten und B bezeichnet die z-Komponente eines äußeren, homogenen Magnetfeldes.
Bestimmen Sie

(a) $\boxed{5\text{P}}$ die Energieeigenwerte und Eigenkets für zwei identische Teilchen. Warum muss hier $b = 0$ gelten? Unterscheiden Sie die beiden Fälle, dass es

- keine weiteren Freiheitsgrade gibt.
- zusätzliche, vom Spin unabhängige Freiheitsgrade gibt.

(b) $\boxed{3\text{P}}$ die Energieeigenwerte für zwei verschiedene Teilchen.

Aufgabe 5: Stromerhaltung der Dirac-Gleichung $\boxed{\textbf{6P}}$

(a) $\boxed{3\text{P}}$ Leiten Sie aus der Dirac-Gleichung

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0$$

des Spinors ψ die Dirac-Gleichung für den adjungierten Spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ her.
Hinweis: Es gilt $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

(b) $\boxed{3\text{P}}$ Berechnen Sie die Viererdivergenz der beiden Ströme

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad j^\mu_A = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi.$$

Dabei sei $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ und erfüllt die Relation $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$. Unter welcher Bedingung sind die beiden Ströme erhalten?