Wintersemester 2022/23
Theorie E - Klausur 2

Prof. Dr. G. Heinrich, Dr. M. Kerner

23.3.2023

Tragen Sie bitte leserlich Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer in den dafür vorgesehenen Feldern auf der hier vorliegenden Titelseite ein und geben Sie dieses Blatt nach Beendigung der Klausur mit ab. Schreiben Sie auch auf jedes von Ihnen beschriebene Blatt leserlich Ihre Matrikelnummer.

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt ist als Hilfsmittel zugelassen.

Wir wünschen viel Erfolg!

Bitte auf dieser Seite ab hier nichts mehr ausfüllen!

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)	Summe
Punkte	12	7	7	7	7	
Kürzel						

Formelsammlung

- Drehimpuls

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|j,m\pm 1\rangle.$$

- Harmonischer Oszillator
  - $H|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})|n\rangle$
  - $\langle n_1|x|n_2\rangle = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\left[\sqrt{n_1}\,\delta_{n_2,n_1-1} + \sqrt{n_1+1}\,\delta_{n_2,n_1+1}\right]$

- Dirac-Darstellung der γ-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

- Pauli-Matrizen

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Integrationsformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\beta x - \alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}\,\exp(-\beta^2/(4\alpha))$$

Aufgabe 1: Warm-up $\boxed{\textbf{12P}}$

(a) $\boxed{4P}$ Nennen Sie die drei Beiträge zur Feinstruktur des Wasserstoffatoms und erläutern Sie diese kurz. (Jeweils ein Satz genügt.)

(b) $\boxed{1P}$ Wann sind die Quantenzahlen l, m_l, s, m_s für Bahndrehimpuls und Spin nicht geeignet zur Beschreibung eines Systems?

(c) $\boxed{2P}$ $|njm\rangle$ sei ein Eigenvektor der Operatoren $\vec{J}^2$ und J_z. A sei ein Operator für den gilt $[A, J_z] = 0$. Zeigen Sie, dass hieraus folgt, dass das Matrixelement $\langle njm|A|njm'\rangle$ nur für $m = m'$ von Null verschieden sein kann.

(d) $\boxed{3P}$ Die Matrizen α^i $(i = 1, 2, 3)$ und β erfüllen die Antikommutations-Relationen $\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}$ und $\{\alpha^i, \beta\} = 0$, wobei $\beta^2 = 1$. Die γ-Matrizen sind gegeben durch $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha^i$. Zeigen Sie, dass hieraus folgt $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

(e) $\boxed{2P}$ Was wird durch die Pauli-Gleichung beschrieben?

Aufgabe 2: Hyperfeinwechselwirkung $\boxed{\textbf{7P}}$

Die Hyperfeinwechselwirkung zwischen einem Kern mit $S_1 = 2$ und einem Elektron werde durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{2\alpha}{\hbar^2}\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

beschrieben.

(a) $\boxed{3P}$ Bestimmen Sie alle möglichen Energieeigenwerte und deren Entartung.

(b) $\boxed{4P}$ Konstruieren Sie die Eigenzustände von $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, Gesamtspin $\vec{S}^2$ und S_z mit dem Eigenwert $s_z = +\frac{3}{2}\hbar$.

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld $\boxed{\textbf{7P}}$

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m, Ladung q und Frequenz ω in einem homogenen, elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, welches entlang der x-Achse ausgerichtet ist. Die Wechselwirkung des harmonischen Oszillators mit dem elektrischen Feld sei durch den Wechselwirkungsterm

$$H_I = -q\vec{x} \cdot \vec{E}(t) = -qxE(t), \quad \text{mit} \quad E(t) = E_0\, e^{-(t/\tau)^2},$$

gegeben, wobei E_0 und τ Konstanten sind. Zur Zeit $t = -\infty$ befinde sich das System im Grundzustand.

(a) $\boxed{3P}$ Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im Zustand $|1\rangle$ zu finden in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.

(b) $\boxed{4P}$ Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ im Zustand $|2\rangle$ zu finden in der ersten nichtverschwindenden Ordnung Störungstheorie.
Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Integranden, um die in der Formelsammlung angegebene Integrationsformel anwenden zu können.

Aufgabe 4: Drei identische Teilchen $\boxed{\textbf{7P}}$

Ein System bestehe aus drei identischen Teilchen mit Hamiltonoperator $H = H_1 + H_2 + H_3$, wobei der Hamilton-Operator eines Teilchens H_i jeweils drei Energieeigenwerte 0, $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$ hat. Hierbei ist $\omega > 0$ und die Energieniveaus seien jeweils $(2s + 1)$-fach entartet, wobei s der Spin des Teilchens ist.

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Bestimmen Sie für ein System aus drei identischen Bosonen mit Spin $s = 0$ für den Grundzustand, sowie die ersten drei angeregten Energieniveaus *alle* erlaubten Zustände.

(b) $\boxed{\text{4P}}$ Geben Sie für ein System aus drei Elektronen die Energieniveaus von H an. Bestimmen Sie für den Grundzustand, sowie den 1. angeregten Zustand *jeweils einen* erlaubten Zustand. Welchen Entartungsgrad haben die beiden Energieniveaus? Begründen Sie Ihre Antwort.
Verwenden Sie als Notation z.B. $|2+; 0-; 1-\rangle$ um einen Zustand zu beschreiben, in dem Elektron 1 die Energie $E_1 = 2\hbar\omega$ und Spin $s_{1z} = +\hbar/2$ hat und für die beiden anderen Elektronen gilt $E_2 = 0$, $E_3 = \hbar\omega$, $s_{2z} = s_{3z} = -\hbar/2$.

Aufgabe 5: Spinzustände in der Dirac-Gleichung $\boxed{\textbf{7P}}$

Die Ebenen Wellen-Lösungen für ein Dirac-Teilchen mit Masse m und Impuls $\vec{p}$ sind gegeben durch

$$u_i(x) = e^{-ipx} u_i(p), \quad \text{mit} \quad u_i(p) = N \begin{pmatrix} \chi_i \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\chi_i \end{pmatrix},$$

wobei $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $N = \sqrt{(E+m)/2m}$ eine im Folgenden irrelevante Normierungskonstante ist.

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Zeigen Sie, dass die $u_i(x)$ Lösungen der Dirac-Gleichung sind.

(b) $\boxed{\text{4P}}$ Bestimmen Sie, welche Bedingung für den Impuls $\vec{p}$ gelten muss, damit eine geeignet gewählte Linearkomination aus u_1 und u_2 eine Eigenfunktion des Spinoperators,

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

ist.