1 a) • relativistische kin. Energie

Die relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E=(\vec{p}^2c^2+m^2c^4)^{1/2}$$

führt in der Entwicklung für kleine $\vec{p}$ auf

$$E=mc^2+\frac{\vec{p}^2}{2m}-\frac{1}{8}\frac{(\vec{p}^2)^2}{m^3c^2}$$

und damit zu einem Zusatzterm $\sim(\vec{p}^2)^2$ im Vergleich zur Schrödinger-Gl.

• LS-Kopplung

Aus der Dirac-Gleichung erhält man einen zusätzlichen Term $\sim\vec{L}\cdot\vec{S}$, der zu einer Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls führt.

• Darwin-Term

Durch die Zitterbewegung der Elektronen spüren diese im Mittel ein Potential $V_{eff}=\langle V(\vec{r}+\delta\vec{r})\rangle$, was zu einer Verschiebung der $l=0$-Zustände führt.

Namen: 1
Erläuterung: 3·1

4

b) Wenn $\vec{L}$ oder $\vec{S}$ nicht mit H vertauschen, da die Zustände $|l,m_l\rangle$ bzw. $|s,m_s\rangle$ dann keine Eigenzustände von H sind. 1

c) Aus $[A,J_z]=0$ folgt

$$0=\langle njm|[A,J_z]|njm'\rangle$$
$$=\langle njm|AJ_z-J_zA|njm'\rangle$$
$$=(m'-m)\langle njm|A|njm'\rangle$$
$$\Rightarrow m'=m \quad\text{oder}\quad \langle njm|A|njm'\rangle=0$$
$$\Rightarrow \langle njm|A|njm'\rangle\neq0 \text{ nur für } m=m'$$ 2

d) $\mu=\nu=0$:

$$\{\gamma^0,\gamma^0\}=\{\beta,\beta\}=\beta\beta+\beta\beta=2\beta^2=2=2g^{00}$$

$\mu=0,\quad \nu\neq0$:

$$\{\gamma^0,\gamma^\nu\}=\{\beta,\beta\alpha^\nu\}=\beta\beta\alpha^\nu+\beta\alpha^\nu\beta$$
$$=\alpha^\nu-\beta\beta\alpha^\nu=0=2g^{0\nu}$$

Analog für $\mu\neq0,\ \nu=0$

$\mu \neq 0, \quad \nu \neq 0$:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \{\beta\alpha^\mu, \beta\alpha^\nu\}$$
$$= \beta\alpha^\mu\beta\alpha^\nu + \beta\alpha^\nu\beta\alpha^\mu$$
$$= -\beta^2\alpha^\mu\alpha^\nu - \beta^2\alpha^\nu\alpha^\mu$$
$$= -\alpha^\mu\alpha^\nu - \alpha^\nu\alpha^\mu = -\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\}$$
$$= -2\delta^{\mu\nu} = +2g^{\mu\nu}$$

3

e) Die Pauli Gleichung

$$i\hbar\partial_t\varphi = \left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e}{2m}(\vec{L}+2\vec{S})\cdot\vec{B} + e\phi\right)\varphi$$

ist der Niederenergie Limes der Dirac-Gleichung und beschreibt die Kopplung eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit dem elektrom. Feld.

2

2 a) $\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\vec{S}^2 - \vec{S}_1^{\,2} - \vec{S}_2^{\,2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{S}^2 - \hbar^2\, 2\cdot 3 - \hbar^2\,\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{S}^2 - 6\tfrac{3}{4}\hbar^2\right)$$

$$\Rightarrow H = \frac{\alpha}{\hbar^2}\left(\vec{S}^2 - 6\tfrac{3}{4}\hbar^2\right)$$

1

$\Rightarrow$ Energie hängt nur von Gesamtspin S ab.

Es gilt:

$|2-\frac{1}{2}| \leq S \leq |2+\frac{1}{2}|$, Entartung $2S+1$

$\Rightarrow$ 6 Zustände $|\frac{5}{2}, M\rangle$ mit

Energie $E_{5/2} = \alpha\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2} - \frac{27}{4}\right) = 2\alpha$

4 Zustände $|\frac{3}{2}, M\rangle$ mit

Energie $E_{3/2} = \alpha\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - \frac{27}{4}\right) = -3\alpha$

2

b) $|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle = |2,2;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$

$$J_-|\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{7}{2} - \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}}\;|\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \sqrt{5}\hbar\,|\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\rangle$$

$$= J_-|2,2;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\sqrt{2\cdot 3 - 2\cdot 1}\;|2,1;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$+\hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}}\;|2,2;\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$= 2\hbar|2,1;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \hbar|2,2;\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\Rightarrow |\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{4}{5}}\,|2,1;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{5}}\,|2,2;\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

2

$$\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\tfrac{4}{5}}\left|2,2,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\left|2,1;\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle$$ 2

so dass $\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\middle|\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\right\rangle = 0$

$$\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\middle|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right\rangle = 1$$

③ Zeitabh. Störungs theorie:

$$a_m(t) = a_m(t_0) + \frac{1}{i\hbar}\sum_n \int_{t_0}^{t} dt'\, a_n(t')\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t'} \langle m|V(t')|n\rangle$$

In 0. Ordnung gilt: $a_n^{(0)}(t) = \delta_{n0}$

a) $$a_1^{(1)}(\infty) = 0 + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \cdot 1 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t'} \langle 1|-qx\,E(t')|0\rangle$$ 1

$$= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{i\omega t'} \cdot (-qE_0)\, e^{-(t'/\tau)^2}\langle 1|x|0\rangle$$

$$= \frac{-qE_0}{i\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{i\omega t' - (t'/\tau)^2}$$ 1

$$= \frac{-qE_0}{i\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot\sqrt{\pi\tau^2}\, e^{-\omega^2\tau^2/4}$$

$$\Rightarrow P_{01} = |a_1^{(1)}|^2 = \frac{q^2E_0^2\,\pi\tau^2}{2\hbar m\omega}\, e^{-\omega^2\tau^2/2}$$ 1

b) $a_2^{(1)} = 0$, da $\langle 2|x|0\rangle = 0$

$$a_2^{(2)}(\infty) = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, a_1^{(1)}(t')\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_2)t'}\langle 2|H_I|1\rangle$$

$$= \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - E_1)t''}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_2)t'}$$

$$\cdot(-qE_0)^2 \cdot e^{-(t'/\tau)^2}\, e^{-(t''/\tau)^2}\cdot\langle 2|x|1\rangle\langle 1|x|0\rangle$$ 2

$$= -\frac{q^2E_0^2}{\hbar^2}\,\frac{\hbar}{m\omega}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt''\, e^{i\omega t'}\, e^{i\omega t''}\, e^{-(t'/\tau)^2}\, e^{-(t''/\tau)^2}$$

$$\left[\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{x} dy\, f(x)\, f(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x)\, f(y)\ \right.$$ 1

$$= -\frac{q^2E_0^2}{\hbar m\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\,\pi\tau^2\, e^{-\omega^2\tau^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad P_{20} = |a_2^{(2)}|^2 = \frac{q^4 E_0^4 \pi^2 \tau^4}{8 \hbar^2 m^2 \omega^2} \, e^{-\omega^2 \tau^2}$$ 1

4 a) Grundzustand: $|000\rangle$

1. angeregter Zustand: $|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle$ 1

2. a. Z.: $|200\rangle + |020\rangle + |002\rangle$, $|110\rangle + |011\rangle + |101\rangle$ 1

3. a. Z.: $|012\rangle + |021\rangle + |120\rangle + |102\rangle + |201\rangle + |210\rangle$, $|111\rangle$ 1

b) Maximal 2 Elektronen können gleiches Energieniveau besetzen $\Rightarrow$ niedrigste Energie ist $\hbar\omega$, maximale Energie $5\hbar\omega$

$$\Rightarrow E \in \{\hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, 4\hbar\omega, 5\hbar\omega\}$$ 1

Grundzustand:
$$|1+,0+,0-\rangle - |1+,0-,0+\rangle - |0+,1+,0-\rangle + |0-,1+,0+\rangle + |0+,0-,1+\rangle - |0-,0+,1+\rangle$$ 1

Zusätzlich gibt es einen Zustand mit einem Elektron im Zustand $|1-\rangle$

$\rightarrow$ Grundzustand ist 2-fach entartet 1/2

Im 1 angeregten Energieniveau gibt es 4 Zustände:
$|2+,0+,0-\rangle$ + antisymm. Perm.,
$|2-,0+,0-\rangle$ "
$|1+,1-,0+\rangle$ "
$|1+,1-,0-\rangle$ "

4-fache Entartung 1/2

Angabe eines vollst. antisymm. Zust. 1

5 Die Dirac-Gleichung angewandt auf $u_i(x)$ ergibt:

$$0 = (i\not{\partial} - m)\, u_i(x) = (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\, e^{-ipx} u_i(p)$$
$$= (p_\mu \gamma^\mu - m)\, u_i(p) = (E\cdot\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} - m)\, u_i(p)$$ 1
$$= \begin{pmatrix} E-m & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -E-m \end{pmatrix} \cdot N \cdot \begin{pmatrix} \chi_i \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m}\chi_i \end{pmatrix}$$
$$= N \begin{pmatrix} \left(E-m-\frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{E+m}\right)\chi_i \\ \left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\right)\chi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 1

da $\frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{E+m} = \frac{\vec{p}^2}{E+m} = \frac{E^2-m^2}{E+m} = E-m$ 1

b) Linerkombination: $u_\lambda = a_1 u_1 + a_2 u_2$

$$\Rightarrow \chi_\lambda = a_1 \chi_1 + a_2 \chi_2$$

Eigenwertgleichung

$$S_x \chi_\lambda = \lambda \chi_\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \chi_\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \chi_\lambda \end{pmatrix}$$

obere Komponenten:

$$\frac{1}{2} \sigma_x \chi_\lambda = \lambda \chi_\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \chi_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder} \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad \chi_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1

Für die unteren Komponenten erhält man dann:

$$\frac{1}{2} \sigma_x \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \chi_{\pm\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \chi_{\pm\frac{1}{2}}$$

Mit $\vec{p}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$ und $\chi_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

1

erhält man

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \, \chi_\pm = \begin{pmatrix} p_z \pm p_x \mp ip_y \\ p_x + ip_y \mp p_z \end{pmatrix}$$

und somit

$$\frac{1}{2} \sigma_x \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \chi_\pm = \frac{1}{2} \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_x + ip_y \mp p_z \\ p_z \pm p_x \mp ip_y \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} \pm p_z + p_x - ip_y \\ \pm p_x \pm ip_y - p_z \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \chi_{\pm\frac{1}{2}}$$

Die Gleichung ist nur erfüllt, falls $p_y = p_z = 0$.

p_x ist beliebig $\Rightarrow \vec{p} = p_x \cdot \vec{e}_x$

2