Lösung zur Übungsklausur Moderne Theoretische Physik II, WS 15/16

4. Januar 2016

Aufgabe 1 (7 Punkte): „Quickies“

1. (3 Punkte) Die Dirac-Gleichung für ein Elektron im elektromagnetischen Feld $(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi = 0$ geht unter einer Eichtransformation über in $(i\not{\partial} - e\not{A} + e\not{\partial}G(x) - m)e^{ieG(x)}\psi = 0$. Mit $i\not{\partial}e^{ieG(x)}\psi = -e^{ieG(x)}e\not{\partial}G(x) - e^{ieG(x)}\not{\partial}\psi$ folgt die wieder die Dirac-Gleichung.

2. (2 Punkte) $\phi'(x') = \phi(x)$.

3. (2 Punkte) Mit der Antikommutatorrelation der Gamma-Matrizen folgt $\gamma^\mu\not{p}\gamma_\mu = -\not{p}\gamma_\mu\gamma^\mu + 2p^\mu\gamma_\mu = -2\not{p}$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Axialvektorstrom

1. (3 Punkte) Der gegebene Strom im gestrichenen System ergibt sich über die transformierten Spinoren, d.h.

$$\begin{aligned}
{j'_A}^{\mu}(x') &= \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') \\
&= \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\frac{i}{4!}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\
&= \bar{\psi}(x)\frac{i}{4!}\varepsilon_{\lambda'\nu'\rho'\sigma'}\Lambda^{\lambda'}_{\lambda}\Lambda^{\nu'}_{\nu}\Lambda^{\rho'}_{\rho}\Lambda^{\sigma'}_{\sigma}\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\Lambda^{\mu'}_{\mu}\gamma^\mu\psi(x) \\
&= \det(\Lambda)\Lambda^{\mu'}_{\mu}\bar{\psi}(x)\frac{i}{4!}\varepsilon_{\lambda\nu\rho\sigma}\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\psi(x) \\
&= \det(\Lambda)\Lambda^{\mu'}_{\mu}\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x')
\end{aligned} \tag{1}$$

2. (3 Punkte) Eine der Lösungen der Dirac-Gleichung mit negativer Energie ist

$$\psi = Ne^{imc^2t/\hbar}v^{(1)}\ . \tag{2}$$

Der Strom j_A^μ hat dann die Form

$$\begin{aligned}
j_A^\mu &= \psi^\dagger\gamma_0\gamma_5\gamma^\mu\psi \\
&= N^2\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= N^2\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}$$

Für $\mu = 0$ ergibt sich damit

$$j_A^0 = N^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= 2N^2 \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \right)_{11} = \frac{p_z}{m} = v_z \tag{4}$$

und für $\mu = i \neq 0$

$$j_A^i = N^2 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -N^2 \left[(\sigma_i)_{11} + \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \sigma_i \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{p_0+m} \right)_{11} \right] \\ &= -N^2 \left[\delta_{i3} + \left(-\frac{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2}{(p_0+m)^2} \sigma_i + 2 \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{(p_0+m)^2} p_i \right)_{11} \right] \\ &= -N^2 \left[\delta_{i3} - \frac{\vec{p}^2}{(p_0+m)^2} \delta_{i3} + 2 \frac{p_z p_i}{(p_0+m)^2} \right] \\ &= \begin{cases} -v_z v_x + O(v^4) & \text{falls } i = 1 \\ -v_z v_y + O(v^4) & \text{falls } i = 2 \\ 1 + v_z^2 - v_x^2 - v_y^2 + O(v^4) & \text{falls } i = 3 \end{cases} . \end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte) Relativistischer Harmonischer Oszillator

1. (2 Punkte) Für einen Eigenzustand $|n_x, n_y, n_z\rangle$ folgt der Energieeigenwert

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) . \tag{6}$$

2. (5 Punkte) Bestimmung des Störoperators aus der relativistischen Energie:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8c^2m^3} + \cdots . \tag{7}$$

Damit folgt der Störoperator $H_1 = -\frac{\vec{p}^4}{8c^2m^3}$. Der Impulsoperator lässt sich durch die Auf- und Absteigeoperatoren schreiben als

$$p_j = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}(a_j - a_j^\dagger), \quad j = x, y, z . \tag{8}$$

Damit lässt sich die vierte Potenz des Impulsoperators über die Operatoren $N_x = a_x^\dagger a_x$, $N_y = a_y^\dagger a_y$, $N_z = a_z^\dagger a_z$. Dazu setzt man

$$\vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -\frac{m\omega}{2} \left[(a_x - a_x^\dagger)^2 + (a_y - a_y^\dagger)^2 + (a_z - a_z^\dagger)^2 \right] , \tag{9}$$

Zum Erwartungswert tragen nur Terme mit gleichvielen Auf- und Absteigeoperatoren bei. Die unbalancierten Terme werden im Folgenden vernachlässigt.

$$
\begin{aligned}
\vec{p}^{\,4} = \frac{m^2\omega^2}{4}\Big[&(a_x - a_x^\dagger)^4 + (x \to y) + (x \to z) \\
&+ 2(a_x - a_x^\dagger)^2(a_y - a_y^\dagger)^2 + (x \to z) + (y \to z)\Big] \qquad (10)\\
= \frac{m^2\omega^2}{4}\Big[&a_x a_x a_x^\dagger a_x^\dagger + a_x a_x^\dagger a_x a_x^\dagger + a_x a_x^\dagger a_x^\dagger a_x + a_x^\dagger a_x a_x a_x^\dagger + a_x^\dagger a_x a_x^\dagger a_x + a_x^\dagger a_x^\dagger a_x a_x \\
&+ (x \to y) + (x \to z) \\
&+ 2(a_x a_x^\dagger + a_x^\dagger a_x)(a_y a_y^\dagger + a_y^\dagger a_y) + (x \to z) + (y \to z)\Big] \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Nutze nun $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{p}^{\,4} = \frac{m^2\omega^2}{4}\Big[&a_x a_x^\dagger + 2a_x a_x^\dagger a_x a_x^\dagger + 2a_x^\dagger a_x + 4a_x^\dagger a_x a_x^\dagger a_x - a_x^\dagger a_x \\
&+ (x \to y) + (x \to z) \\
&+ 2(2a_x^\dagger a_x + 1)(2a_y^\dagger a_y + 1) + (x \to z) + (y \to z)\Big]\ . \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Mit $a^\dagger a = N$ kann man schreiben

$$
\begin{aligned}
\vec{p}^{\,4} = \frac{m^2\omega^2}{4}\Big[&(N_x + 1) + 2(N_x + 1)^2 + N_x + 4N_x^2 \\
&+ (x \to y) + (x \to z) \\
&+ 2(2N_x + 1)(2N_y + 1) + (x \to z) + (y \to z)\Big] \qquad (13)\\
= \frac{m^2\omega^2}{4}\big[&15 + 14N_x + 6N_x^2 + 14N_y + 6N_y^2 + 14N_z + 6N_z^2 \\
&+ 8(N_x N_y + N_z N_y + N_x N_z)\big]\ . \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Für die Energiekorrektur in erster Ordnung (nicht-entarteter) Störungstheorie gilt also

$$
\begin{aligned}
E^{(1)}_{n_x n_y n_z} &= \langle n_x n_y n_z | \left(-\frac{\vec{p}^{\,4}}{8c^2m^3}\right) | n_x n_y n_z \rangle \\
&= -\frac{\omega^2}{32c^2m}\big[15 + 14n_x + 6n_x^2 + 14n_y + 6n_y^2 + 14n_z + 6n_z^2 + 8(n_x n_y + n_z n_y + n_x n_z)\big]
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

und damit für den Grundzustand

$$
E^{(1)}_{000} = -\frac{15\omega^2}{32c^2m}\ . \qquad (16)
$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Streuung am Gauß-Potential

1. (5 Punkte) Die Streuamplitude ist in Bornscher Näherung gegeben durch die Fouriertransformierte $\tilde{V}$ des Potentials, d.h.

$$
\begin{aligned}
f(\theta, \phi) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}) \\
&= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\int d^3r\, e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\vec{r}^2}{\sigma^2}}\ .
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Mit $K := |\vec{k}' - \vec{k}|$, und $(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r} = |\vec{k}' - \vec{k}| r \cos\theta = Kr\cos\theta$ folgt

$$\begin{aligned} f(\theta,\phi) = & -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\int dr\, d\phi\, \cos\theta\, r^2 e^{-iKr\cos\theta} e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}} \\ = & \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\frac{2\pi}{iK}\int_0^\infty dr\, r \left(e^{-iKr} - e^{iKr}\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2}} \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Mit quadratischer Ergänzung

$$\pm iKr - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}(r^2 \mp 2iK\sigma^2 r) = -\frac{1}{2\sigma^2}[(r \mp iK\sigma^2)^2 + K^2\sigma^4] \tag{19}$$

folgt

$$\begin{aligned} f(\theta,\phi) &= \frac{m}{\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\frac{1}{iK}e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}}\int_0^\infty dr\, r\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r+iK\sigma^2)^2} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r-iK\sigma^2)^2}\right) \\ &= \frac{m}{\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\frac{1}{iK}e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}}\left(\int_0^\infty dr\, re^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r+iK\sigma^2)^2} + \int_{-\infty}^0 dr\, re^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r+iK\sigma^2)^2}\right) \\ &= \frac{m}{\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\frac{1}{iK}e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^\infty dr\, re^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r+iK\sigma^2)^2} \\ &= \frac{m}{\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\frac{1}{iK}e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty+iK\sigma^2}^{\infty+iK\sigma^2} dr\, (r - iK\sigma^2)e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Hier wurde im zweiten Schritt im zweiten Term die Substitution $r \to -r$ durchgeführt. Nun verschwindet das Integral über der ungeraden funktion $re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$. Die verbleibende Funktion hat keine Pole in dem Streifen zwischen $iK\sigma^2 + \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$. Damit lässt sich die Integrationskontur auf die reelle Achse verschieben, und es gilt

$$\begin{aligned} f(\theta,\phi) = & -\frac{m}{\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\sigma^2 e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^\infty dr\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ = & -\frac{m}{\hbar^2}\frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\sigma^3 e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}}\sqrt{2\pi} \\ = & -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}e^{-\frac{K^2\sigma^2}{2}} \end{aligned} \tag{21}$$

2. (2 Punkte) Die Bornsche Näherung ist eine gute Näherung falls $V_0 \ll E$, wobei für die einlaufende und die gestreute Welle gilt

$$k = k' = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{22}$$

und mit der Einführung des Streuwinkels θ,

$$\begin{aligned} K^2 = |\vec{k}' - \vec{k}|^2 &= \vec{k}'^2 + \vec{k}^{\,2} - 2k'k\cos\theta \\ &= \frac{4mE}{\hbar^2}(1-\cos\theta) \ , \end{aligned} \tag{23}$$

folgt

$$V_0 \ll \frac{K^2\hbar^2}{4m(1-\cos\theta)} \ . \tag{24}$$

3. (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega \, |f(\theta, \phi)|^2 \\
&= \left(\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int d\Omega \, e^{-K^2\sigma^2} \\
&= 2\pi \left(\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int d\cos\theta \, e^{-\frac{4mE(1-\cos\theta)}{\hbar^2}\sigma^2} \\
&= 2\pi \left(\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{\hbar^2}{4mE\sigma^2} \left[1 - e^{-\frac{8mE}{\hbar^2}\sigma^2} \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

4. (2 Punkte) Die Bornsche Näherung ist zuverlässig für hohe Energien, während die Entwicklung nach Streuphasen gut konvergiert, falls Teilchen geringer Energie einlaufen. Für eine Entwicklung nach Streuphasen in Bornscher Näherung benötigt man also viele Streuphasen.