

Übungsklausur zur Vorlesung Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn

22.12.2015

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Name:

Gruppe:

Matrikelnummer:

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe:

1 (7P)

2 (7P)

3 (10P)

4 (6P)

Σ

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Aufgabe 1 (7 Punkte): „Quickies“

1. Zeigen Sie, dass für $\Gamma = i\gamma_5$ gilt $\bar{\Gamma} = \Gamma$ mit $\bar{\Gamma} \equiv \gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0$
2. Der Spinor $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$ sei Lösung der Dirac-Gleichung, d.h. es gilt $(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0$. Zeigen Sie, dass ψ_i Lösung der Klein-Gordon-Gleichung ist.
3. a^μ und b^μ seien 4-Vektoren. Zeigen Sie, dass $T^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$ ein Tensor zweiter Stufe ist.

Einige nützliche Formeln:

$$\int_0^\infty dx e^{-x^2/(2a^2)} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right], \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right],$$

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^3), \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu G(x), \quad \psi'(x) = e^{ieG(x)} \psi(x), \quad \vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}, \quad (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$$

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte): Relativistischer Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den 3-dimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2 .$$

1. Wie lauten die Energieeigenwerte? Verwenden Sie ihr Wissen über den 1-dimensionalen harmonischen Oszillator.
2. Berechnen Sie die führende relativistische Energiekorrektur im Grundzustand.

Aufgabe 3 (10 Punkte): Streuung am Gauß-Potential

Betrachten Sie die elastische Streuung eines quantenmechanischen Teilchens an einem Gauss-förmigen Potential

$$V(\vec{r}) = \frac{V_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\vec{r}^2}{\sigma^2}}$$

1. Zeigen Sie, dass für den Fall einer einlaufenden ebenen Welle $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ die Streuamplitude in Bornscher Näherung die Form $f(\theta, \phi) = f_0 e^{-\alpha K^2}$ hat, und bestimmen Sie α und f_0 .
2. Sei $\vec{k}'$ der Wellenvektor der gestreuten Welle. Für welche Werte von $K = |\vec{k} - \vec{k}'|$ ist dieser Ausdruck eine gute Näherung für den exakten Wert der Streuamplitude? Geben Sie eine entsprechende Abschätzung für K in Abhängigkeit von V_0 und $\cos\theta$ an. K , V_0 und $\cos\theta$ an.
3. Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung.
4. Angenommen, Sie möchten in Bornscher Näherung die Streuphasen δ_l bestimmen. Benötigen Sie für eine präzise Beschreibung des Wirkungsquerschnitts eher wenige oder viele Streuphasen? Bitte begründen Sie ihre Antwort kurz.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Pseudoskalarer Dirac-Strom

Betrachten Sie, den Strom

$$j_5 := \bar{\psi}\gamma_5\psi .$$

1. Zeigen Sie, dass j_5 ein Pseudoskalar ist; d.h. zeigen Sie, dass j_5 unter einer Lorentz-Transformation Λ transformiert, wie

$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi' = \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma_5\psi .$$

Hilfreich ist hier die Darstellung: $\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$.

2. Berechnen Sie das Verhalten von j_5 im nicht-relativistischen Grenzfall für einen Zustand $\psi = e^{imc^2t/\hbar}Au^{(1)} + e^{-imc^2t/\hbar}Bv^{(1)}$.