

Theoretische Physik E

Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 1

Aufgabe 1 und 2 sind bis Montag, 25.10.2004, 10:00 Uhr, abzugeben,
Aufgabe 3 und 4 bis Freitag, 29.10.2004, 9:45 Uhr.

Bitte vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe
auf den abgegebenen Blättern.

Aufgabe 1: Spektraldarstellung

Eine Observable A werde beschrieben durch den Operator

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte a_i und Eigenzustände $|a_i\rangle$ von A . Zeigen Sie damit, daß sich A in der Spektraldarstellung schreiben läßt als

$$A = \sum_{i=1}^3 a_i |a_i\rangle \langle a_i|.$$

Hinweis: Drücken Sie dazu die $|a_i\rangle \langle a_i|$ durch 3×3 -Matrizen aus.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Eigenwertproblem für Zweizustandssystem

Der Hamiltonoperator eines Zweizustandssystems mit den Basiszuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ sei gegeben durch

$$H = \hbar\omega \left(|1\rangle \langle 1| - |2\rangle \langle 2| + |1\rangle \langle 2| + |2\rangle \langle 1| \right),$$

Finden Sie die Energie-Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenkets als Linearkombinationen von $|1\rangle$ und $|2\rangle$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Spin-1/2-System

$|+\rangle$ und $|-\rangle$ seien die Eigenzustände eines Spin-1/2-Systems bezüglich S_x . In dieser Basis können die Operatoren S_x , S_y und S_z dargestellt werden als

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{\hbar}{2} \left(|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| \right), \\ S_z &= \frac{i\hbar}{2} \left(-|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| \right), \\ S_x &= \frac{\hbar}{2} \left(|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| \right). \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die 2×2 -Matrizen S_x , S_y und S_z in der $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ -Basis. (3 Punkte)

- b) Zeigen Sie unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften von $|+\rangle$ und $|-\rangle$, daß gilt:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k \quad \text{und} \quad \{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}.$$

(3 Punkte)

- c) Berechnen Sie

$$\langle(\Delta S_z)^2\rangle \equiv \langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2,$$

wobei die Erwartungswerte bezüglich des $|+\rangle$ -Zustandes zu bilden sind. Überprüfen Sie ausgehend von Ihrem Ergebnis, ob die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2$$

erfüllt ist für $A \rightarrow S_y$, $B \rightarrow S_z$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4: Meßprozeß

Ein Spin-1/2-System befinde sich in einem Eigenzustand von $\vec{S} \cdot \vec{n}$ mit Eigenwert $\hbar/2$, wobei $\vec{n} = (\sin\beta, \cos\beta, 0)$ ein Einheitsvektor in der (x, y) -Ebene mit Winkel β zur y -Achse sei.

- a) Nehmen Sie an, S_x wird gemessen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das System im Zustand $s_x = \hbar/2$ zu finden?

(4 Punkte)

- b) Bestimmen Sie die Varianz in S_x , d. h.

$$\langle(S_x - \langle S_x \rangle)^2\rangle.$$

(4 Punkte)

- c) Diskutieren Sie die oben erhaltenen Ergebnisse für die Grenzfälle $\beta = 0$ und $\beta = \pi/2$.

(2 Punkte)