Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 2

Die gerechneten Beispiele sind bis Freitag, 5.11.2004, 9:45 Uhr abzugeben.

Bitte vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf den abgegebenen Blättern.

Aufgabe 5: *H-Atom in elektrischem Feld*

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem zeitabhängigen homogenen elektrischen Feld, das durch

$$E(t) = \frac{A}{e\pi}\frac{1}{t^2+\tau^2}$$

gegeben ist, wobei A und τ Konstanten sind.

a) Bestimmen Sie den Hamiltonoperator $H = H_0 + V(t)$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Atom zur Zeit $t = +\infty$ in einem $2p$-Zustand $|n, l, m\rangle = |2, 1, 0\rangle$ befindet, falls es zur Zeit $t = -\infty$ im Grundzustand $|1, 0, 0\rangle$ gewesen ist.

Hinweis: Die Wasserstoffwellenfunktion ist gegeben durch

$$\Psi_{nlm}(\vec{x}) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi) \text{ mit } E_n = -e^2/(2a_0n^2), \quad \text{wobei}$$

$$R_{10}(r) = \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-r/a_0}, \qquad R_{21}(r) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{3}a_0} r e^{-r/(2a_0)},$$

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta.$$

Außerdem gilt

$$\int_0^\infty dr\, r^n e^{-ar} = n!/a^{n+1}, \quad n \in \mathsf{N}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 6: *Wahrscheinlichkeitsverteilung im Impulsraum*

Die Fouriertransformierte $\phi(\vec{p})$ einer Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ im Ortsraum ist gegeben durch

$$\phi(\vec{p}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \int d^3x \, \exp\left[\frac{-i\vec{p}\vec{x}}{\hbar}\right] \psi(\vec{x}).$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $|\phi(\vec{p})|^2 d^3p$ für den Grundzustand des H-Atoms.

Hinweis: Wählen Sie die z-Achse so, daß sie in die Richtung von $\vec{p}$ zeigt, um die Winkelintegration auszuführen.

(10 Punkte)

Aufgabe 7: *Harmonischer Oszillator & zeitabhängige Kraft*

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator befinde sich im Grundzustand, solange $t < 0$. Für $t \geq 0$ wirke eine zeitabhängige Kraft in x-Richtung,

$$F(t) = F_0 \, e^{-t/\tau}.$$

a) Benutzen Sie zeitabhängige Störungstheorie in erster Ordnung, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß sich der Oszillator bei $t > 0$ in seinem ersten angeregten Zustand befindet. Zeigen Sie, daß Ihr Ergebnis für $t \to \infty$ (τ endlich) nicht mehr von t abhängt.

b) Gibt es höhere angeregte Zustände?

Hinweis: Benutzen Sie $\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\hbar/2m\omega} \, \left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\, \delta_{n',n+1}\right)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 8: *Zusammengesetztes Spin-System*

Betrachten Sie ein System, das sich aus zwei Spin-1/2-Objekten zusammensetzt. Für $t < 0$ sei der Hamiltonoperator unabhängig vom Spin und kann als Null angenommen werden, wenn die Energieskala entsprechend gewählt wird. Für $t > 0$ sei H gegeben durch

$$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

Nehmen Sie an, das System befinde sich zur Zeit $t \leq 0$ im Zustand $|+-\rangle$. Bestimmen Sie dann die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, das System zu einem späteren Zeitpunkt in einem der Zustände $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ und $|--\rangle$ zu finden, indem Sie

a) das Problem exakt lösen,

b) zeitabhängige Störungstheorie in erster Ordnung benutzen und H als Störung betrachten, die bei $t = 0$ eingeschalten wird. Unter welcher Bedingung liefert b) das richtige Ergebnis?

(10 Punkte)