# Theoretische Physik E
# Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

**WS 2004/05**
**Übungsblatt 4**

---

Abgabe bis Freitag, 19.11.2004, 9:45 Uhr.

**Aufgabe 12**: *Exponentialdarstellung der Drehmatrizen*

Die Komponenten einer Matrix $R(\vec{\omega})$, die eine Drehung um den Winkel $\omega$ mit Drehachse in Richtung $\hat{\omega}$ beschreibt, können geschrieben werden als

$$R(\vec{\omega})_{ij} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} + \cos\omega \left(\delta_{ij} - \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2}\right) + \sin\omega \left(-\epsilon_{ijk}\frac{\omega_k}{\omega}\right).$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß diese Darstellung äquivalent ist zu

$$R(\vec{\omega}) = \exp\left[-i\,\vec{l}\cdot\vec{\omega}\right].$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung, in der die Generatoren der Drehung gegeben sind durch

$$l_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad l_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

**Aufgabe 13**: *Folge von Drehungen*

Betrachten Sie eine Abfolge von Euler-Drehungen, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-\frac{i\sigma_3\alpha}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sigma_2\beta}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sigma_3\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Gruppeneigenschaften von Drehungen ist diese Abfolge von Operationen äquivalent zu einer einzigen Rotation um den Winkel $\omega$ mit Drehachse $\hat{\omega}$. Bestimmen Sie $\omega$ und $\hat{\omega}$.

(10 Punkte)

**Aufgabe 14**: *Bahndrehimpuls – Erwartungswerte*

Ein Teilchen in einem sphärisch symmetrischen Potential befinde sich in einem Eigenzustand von $\vec{L}^2$ und $L_z$ mit Eigenwert $\hbar^2 l(l+1)$ bzw. $m\hbar$. Berechnen Sie folgende Erwartungswerte bezüglich des Zustandes $|lm\rangle$:

$$\langle L_x \rangle,\ \langle L_y \rangle \quad \text{und} \quad \langle L_x^2 \rangle,\ \langle L_y^2 \rangle.$$

(10 Punkte)

**Aufgabe 15**: *Teilchen in sphärisch symmetrischem Potential*

Die Wellenfunktion eines Teilchens in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(r)$ sei gegeben durch

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)\, f(r).$$

a) Ist $\psi$ eine Eigenfunktion von $\vec{L}^2$? Wenn ja, was ist der Wert von $l$? Wenn nein, welche Werte kann $l$ annehmen, wenn $\vec{L}^2$ gemessen wird?

b) Bestimmen Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen in den verschiedenen $m_l$-Zuständen anzutreffen.

c) Nehmen Sie an, $\psi(\vec{r})$ sei eine Energie-Eigenfunktion mit Eigenwert $E$. Setzen Sie $V(r)$ in Beziehung zu $f(r)$.

(4+3+3 Punkte)