Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 6

Abgabe bis Freitag, 3.12.2004, 9:45 Uhr.

Aufgabe 20: *Wigner-Matrizen*

Die Wigner-Matrizen $d^{(j)}_{mm'}$ für ein System mit Gesamtdrehimpuls j, das sich aus Teilsystemen mit Drehimpulsen j_i zusammensetzt, lassen sich mittels Clebsch-Gordan-Koeffizienten durch die Wigner-Matrizen $d^{(j_i)}_{m_i m_i'}$ ausdrücken. Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um für den Fall $j=1$ alle Elemente der Wigner-Matrix $d^{(j=1)}_{mm'}(\beta)$ aus den entsprechenden $d^{(j_i=1/2)}_{m_i m_i'}(\beta)$ zu bestimmen.

(10 Punkte)

Aufgabe 21: *Sphärische Tensoren*

a) Konstruieren Sie einen sphärischen Tensor von Rang 1 aus zwei verschiedenen Vektoren $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ und $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$. Drücken Sie $T^{(1)}_{\pm 1, 0}$ durch $U_{x,y,z}$ und $V_{x,y,z}$ aus.

b) Konstruieren Sie einen sphärischen Tensor von Rang 2 aus zwei verschiedenen Vektoren $\vec{U}$ und $\vec{V}$. Geben Sie nun $T^{(2)}_{\pm 2, \pm 1, 0}$ in Termen von $U_{x,y,z}$ und $V_{x,y,z}$ an.

(10 Punkte)

Aufgabe 22: *Magnetisches Moment*

Betrachten Sie ein System, dessen Drehimpuls sich aus zwei Teilen, $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$, zusammensetzt und dessen magnetisches Moment gegeben ist durch

$$\vec{\mu} = c_1 \vec{J}_1 + c_2 \vec{J}_2 \,.$$

Das System befinde sich in einem j_1, j_2 Eigenzustand von $\vec{J}_1^2$, $\vec{J}_2^2$.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von μ_x, μ_y und μ_z bezüglich des Zustandes $|jm; j_1 j_2\rangle$.

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte von μ_z in den verschiedenen $J_z = \hbar m$ Eigenzuständen für ein Elektron (mit g-Faktor $g=2$) im $^2D_{3/2}$ Zustand, also dem Zustand $j_1 = s = 1/2$, $j_2 = l = 2$ und $j = 3/2$.

(10 Punkte)

Aufgabe 23: *Spin-3/2-Kern in elektrischem Feld*

Ein Spin-3/2 Kern, der sich im Koordinatenursprung befindet, werde einem inhomogenen äußeren elektrischen Feld ausgesetzt. Für die elektrische Quadrupolwechselwirkung kann angenommen werden

$$H_{int} = \frac{e\,Q}{2s(s-1)\hbar^2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 S_x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 S_y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 S_z^2\right],$$

wobei ϕ das elektrostatische Potential ist, welches die Laplace-Gleichung erfüllt. Die Koordinatenachsen sind so gelegt, daß

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0 = 0\,.$$

Zeigen Sie, daß die Wechselwirkungsenergie geschrieben werden kann als

$$A\left(3S_z^2 - \vec{S}^2\right) + B\left(S_+^2 + S_-^2\right),$$

und drücken Sie A und B durch die partiellen Ableitungen $(\partial^2\phi/\partial x^2)_0$ usw. aus. Bestimmen Sie die Energie-Eigenkets in Termen von $|m\rangle$ (mit $m = \pm 3/2, \pm 1/2$) und die dazugehörigen Energie-Eigenwerte. Gibt es Entartung?

(10 Punkte)