Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 8

Abgabe bis Freitag, 14.1.2005, 9:45 Uhr.

Aufgabe 26: *Streuung an sphärisch-symmetrischem Potential*

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens mit Masse m und Energie E an einem sphärisch-symmetrischen Potential der Form

$$V(r) = (\mu r + 1)V_0 e^{-\mu r}\,, \quad \mu, V_0 = konst.\,,$$

in Bornscher Näherung.

a) Bestimmen Sie die Streuamplitude $f^{(1)}(\theta)$ und den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für beliebige $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

b) Für kleine Werte von V_0 kann die Streuamplitude als $f(\theta) = A/(B - \cos\theta)^3$ geschrieben werden, wobei die Konstanten A und B in Teil a) bestimmt worden sind. Benutzen Sie diese Form, um die Partialwellenamplituden für die Drehimpulse $l = 0$ und $l = 1$, also $f_0(k)$ und $f_1(k)$, zu berechnen.

c) Benutzen Sie Ihre Ergebnisse für A und B aus Teil a), um die Phasenverschiebungen der Partialwellen, δ_0 und δ_1, für $k \ll \mu$ zu bestimmen.

Hinweis: Die Legendre-Polynome sind so normiert, daß $\int_{-1}^{1} dx\,[P_l(x)]^2 = 2/(2l+1)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 27: *Resonanzstreuung*

In der Vorlesung wurde die Breit-Wigner-Formel hergeleitet, die den Wirkungsquerschnitt für die l-te Partialwelle in der Nähe einer Resonanz beschreibt:

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}\,.$$

In der Hochenergiephysik sind jedoch der Anfangs- und der Endzustand der Streuung nicht notwendigerweise identisch. Die Breit-Wigner-Formel verallgemeinert sich dann zu

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{(\Gamma_{in}/2)(\Gamma_{out}/2)}{(E - E_R)^2 + \Gamma_{tot}^2/4}\,.$$

Experimentell sind E_R und Γ_{tot} direkt zugängig, außerdem sei l bekannt. Wenn die Resonanz schmal ist, kann $k^2(E) \approx k^2(E_R)$ gesetzt werden. Die partiellen Breiten Γ_{in} und Γ_{out} müssen noch bestimmt werden.

a) Berechnen Sie dazu das Integral $F = \int_{-\infty}^{\infty} dE \; \sigma_l$.

b) Betrachten Sie den Prozeß $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Zeigen Sie, wie man die partiellen Breiten $\Gamma_{in} = \Gamma_{ee}$ und $\Gamma_{out} = \Gamma_{\mu\mu}$ bestimmen kann, indem man verschiedene Endkanäle des e^+e^- Streuprozesses (z.B. $e^+e^- \to e^+e^-$ und $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$) auswertet.

(10 Punkte)

Aufgabe 28: *Niederenergetische Streuung & Bindungszustände*

Für niedrige Energien existiert eine Entwicklung der Streuphase in Potenzen von k, deren führende Terme von der Form

$$k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k^2$$

sind, wobei a_0 die Streulänge ist und r_0 als "effektive Reichweite" bezeichnet wird.

a) Berechnen Sie in dieser Näherung den Wirkungsquerschnitt für s-Wellen-Streuung und diskutieren Sie sein Verhalten für kleine Werte von k.

b) Ein gebundener Zustand ist charakterisiert durch $k^2 < 0$, d.h. $k = i\kappa$, wobei κ reell und positiv sein soll. Betrachten Sie $\cot \delta_0$ in der obigen Formel als analytische Funktion in der komplexen Ebene und leiten Sie aus der Bedingung der Normierbarkeit für das asymptotische Verhalten der radialen Wellenfunktion $rA_{l=0} \sim \sin(kr + \delta_0)$ einen Zusammenhang zwischen κ, a_0 und r_0 her.

c) Der eben hergeleitete Zusammenhang erlaubt es, aus den Streuparametern a_0 und r_0 die Energie eines Bindungszustandes zu berechnen (oder umgekehrt).

   Betrachten Sie nun Neutron-Proton-Streuung. Der ${}^3S_1$-Zustand eines np-Systems besitzt einen Bindungszustand mit der Energie $E_{BE} = 2.26$ MeV – das Deuteron. Vergleichen Sie diesen Wert mit demjenigen, den Sie erhalten, wenn Sie E_{EB} abschätzen, indem Sie r_0 vernachlässigen und für a_0 den gemessenen Wert $a_0^{triplet} = 5.4 \cdot 10^{-13}$ cm benutzen.

(10 Punkte)