

Theoretische Physik E

Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 9

Abgabe bis Freitag, 21.1.2005, 9:45 Uhr.

Aufgabe 29: *Spinloses Teilchen & zeitabhängiges Potential*

Ein spinloses Teilchen werde an einem zeitabhängigen Potential

$$\tilde{V}(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos \omega t$$

gestreut.

- Zeigen Sie, daß die Energie des gestreuten Teilchens um den Betrag $\hbar\omega$ zu- oder abnimmt, wenn die Übergangamplitude zur ersten Ordnung in $\tilde{V}$ berechnet wird.
- Berechnen Sie $d\sigma/d\Omega$.
- Diskutieren Sie qualitativ, was passiert, wenn auch Terme höherer Ordnung in $\tilde{V}$ berücksichtigt werden.

Aufgabe 30: *Dirac-Algebra*

- Betrachten Sie die Dirac-Matrizen γ^μ in der chiralen Darstellung

$$\gamma_\chi^\mu = \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

sowie in der Dirac-Darstellung

$$\gamma_D^\mu = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ in zwei Dimensionen und den Paulimatrizen σ_i .

Zeigen Sie, daß beide Darstellungen die Dirac-Algebra, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_4$ (mit $\mathbf{1}_4$ gleich der 4-dimensionalen Einheitsmatrix), erfüllen und durch die unitäre Transformation

$$\gamma_D^\mu = U \gamma_\chi^\mu U^\dagger$$

miteinander in Beziehung stehen. Bestimmen Sie die 4×4 -Matrix U explizit.

b) Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften der Dirac-Matrizen,

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \cdot \mathbf{1}_4, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha, \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} \mathbf{1}_4, \\ \text{Sp}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] &= 4g^{\alpha\beta},\end{aligned}$$

indem Sie die Antikommutator-Beziehung $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_4$ benutzen.

Aufgabe 31: Lösung der freien Dirac-Gleichung

Mit dem Lösungsansatz $\psi = u(p)e^{-ipx}$ für ein freies Elektron mit Impuls $\vec{p}$ erhält man aus der Dirac-Gleichung das lineare Gleichungssystem $(\not{p} - m)u(p) = 0$, aus dem sich $u(p)$ bestimmen läßt. Hier und im folgenden steht $\not{p}$ für $\gamma_\mu p^\mu$. Betrachten Sie nun die Bewegung eines Elektrons in z -Richtung mit $\vec{p} = (0, 0, p_z)$.

- Wieviele linear unabhängige Lösungen $u(p)$ mit positiver Energie gibt es zu $(\not{p} - m)u(p) = 0$?
- Bestimmen Sie die linear unabhängigen Lösungen u_r , die folgende Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen erfüllen:

$$\bar{u}_r u_{r'} = \delta_{rr'},$$

wobei $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$.

- Zeigen Sie, daß gilt:

$$\sum_r u_r \bar{u}_r = \frac{\not{p} + m}{2m}.$$