

Theoretische Physik E

Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 10

Abgabe bis Freitag, 28.1.2005, 9:45 Uhr.

Aufgabe 32: *Elektron in elektromagnetischem Feld*

Die Diracgleichung für ein Elektron, das an ein externes elektromagnetisches Feld $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ koppelt, kann in der Form

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta mc^2 + e\phi) \psi$$

geschrieben werden, wobei $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - e\vec{A}$.

- Benutzen Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen, um den Geschwindigkeitsoperator $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ zu bestimmen.
- Berechnen Sie die Kraft $\vec{F} = d\vec{\pi}/dt$ und zeigen Sie, daß die Lorentz-Gleichung auf Operator-Niveau erfüllt ist,

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Aufgabe 33: *Relativistische Behandlung des Wasserstoff-Atoms*

Betrachten Sie die relativistischen Korrekturen H_{LS} , H_r und H_D zum Hamilton-Operator des Wasserstoff-Atoms,

$$H = H_0 + H_{LS} + H_r + H_D,$$

mit

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r), \\ H_{LS} &= \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{dV}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L}, \\ H_r &= -\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} \right)^2, \\ H_D &= \frac{\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\nabla}^2 V(r) \end{aligned}$$

und $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. Betrachten Sie H_{LS} , H_r und H_D als Störung zu H_0 .

- a) Zeigen Sie, daß der Gesamtdrehimpuls, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, erhalten ist.
- b) Zeigen Sie, daß sich der Darwin-Term, H_D , nur auf Zustände mit $\ell = 0$ auswirkt.
- c) Die Energieniveaus für die Bindungszustände des H-Atoms sind bei Vernachlässigung der relativistischen Korrekturen gegeben durch

$$E_n^{(0)} = -\frac{1}{2a_0 n^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

Berechnen Sie die Änderungen dieser Energieniveaus, welche durch Berücksichtigung von H_{LS} , H_r , H_D , bzw. der Summe dieser Beiträge in erster Ordnung verursacht werden.

Falls Sie die Aufgabe nicht für beliebige Werte von n lösen können, führen Sie die Rechnung stattdessen für $n = 1$ und $n = 2$ durch. Im allgemeinen Fall kann es nützlich sein, folgende Rekursionsbeziehung für Erwartungswerte von r^k in den Wasserstoff-Eigenzuständen $|n\ell m\rangle$ zu benutzen:

$$\frac{k+1}{n^2} \langle r^k \rangle - (2k+1) a_0 \langle r^{k-1} \rangle + \frac{k}{4} [(2\ell+1)^2 - k^2] a_0^2 \langle r^{k-2} \rangle = 0,$$

wobei $k > -(2\ell+1)$ und

$$\langle r^k \rangle \equiv \int_0^\infty dr r^{2+k} [R_{nl}(r)]^2,$$

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a_0},$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{n^3 a_0^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)}.$$