Theoretische Physik E
Quantenmechanik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2004/05
Übungsblatt 11

Abgabe bis Freitag, 4.2.2005, 9:45 Uhr.

Aufgabe 34: Γ^n *Matrizen*

Betrachten Sie die sechzehn 4×4 Matrizen Γ^n, die zur Konstruktion bilinearer Kovarianten benutzt werden,

$$\Gamma^S = \mathbb{1}\,, \quad \Gamma^V_\mu = \gamma_\mu\,, \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5\,,$$
$$\Gamma^P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5\,, \qquad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\,.$$

a) Zeigen Sie, daß für alle Γ^n gilt: $(\Gamma^n)^2 = \pm\mathbb{1}$.

b) Finden Sie zu jedem $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ ein antikommutierendes Γ^m, also ein Γ^m, das folgende Relation erfüllt:

$$\Gamma^n\Gamma^m = -\Gamma^m\Gamma^n\,.$$

c) Bestimmen Sie die Spur eines jeden Γ^n.

d) Zeigen Sie, daß das Produkt zweier beliebiger Γ^a, Γ^b $(a \neq b)$ bis auf einen Phasenfaktor ein drittes $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ ergibt.

e) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit aller Γ^n.

Aufgabe 35: *Kleinsches Paradoxon*

Ein Elektron befinde sich in einem stufenförmigen Potential (ohne Magnetfeld),

$$V(\vec{r}) = e\phi(\vec{r}) = V(z) = \begin{cases} V_0 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0\,. \end{cases}$$

a) Finden Sie für diese Anordnung eine stationäre Lösung ($E \geq mc^2$) der Diracgleichung von der Form

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-iEt/\hbar} \left[\psi_{in}(z) + \psi_{ref}(z) + \psi_{trans}(z) \right] ,$$

wobei

$$\begin{aligned}
\psi_{in}(z) &= a e^{ik_1 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_1}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} && (z<0)\,, \\
\psi_{ref}(z) &= e^{-ik_1 z} \sum_{r=1}^{2} b_r w_r(-\hbar k_1 \hat{z}) && (z<0)\,, \\
\psi_{trans}(z) &= e^{ik_2 z} \sum_{r=1}^{2} d_r w_r(\hbar k_2 \hat{z}) && (z>0)\,.
\end{aligned}$$

und $k_1 > 0$.

Zur Erinnerung: Die Spinoren w_r für ein freies Spin-1/2-Teilchen mit Energie E und Impuls $\vec{p} = (0,0,p_z)$ sind gegeben durch

$$w_1(p) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad w_2(p) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z c}{E+mc^2} \end{pmatrix} .$$

b) Diskutieren Sie die in Aufgabe a) bestimmte Lösung für die zwei Fälle $V_0 < E + mc^2$ und $V_0 > E + mc^2$.

c) Berechnen Sie für $V_0 > E + mc^2$ den Strom

$$\vec{j} = c\, \bar{\psi}(\vec{r},t)\, \vec{\gamma}\, \psi(\vec{r},t)$$

und zerlegen Sie ihn in die Beiträge der einfallenden, reflektierten und transmittierten Ströme, j_{in}, j_{ref} und j_{trans}. Drücken Sie die Verhältnisse j_{trans}/j_{in} und j_{ref}/j_{in} aus durch

$$r = \frac{k_2}{k_1} \frac{E+mc^2}{E - V_0 + mc^2} .$$

d) Zeigen Sie, daß Stromerhaltung gewährleistet ist. Was ist an Ihrem Ergebnis trotzdem eigenartig (Kleinsches Paradoxon)?