

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 1

Abgabe: Fr, 3.11.'06, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator

[4]

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad [p, x] = -i\hbar 1.$$

Zum Übergang in die Energiedarstellung definiert man zweckmäßig die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger, a$ als

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} p \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega} x - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} p \right).$$

- Berechnen Sie den Kommutator $[a, a^\dagger]$.
- Drücken Sie H, x und p durch $a, a^\dagger$ sowie $N = a^\dagger a$ aus.
- Angewandt auf Energieeigenzustände $|n\rangle$ wirken $a^\dagger, a$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, weil $a^\dagger |n\rangle = c' |n+1\rangle$ und $a |n\rangle = c |n-1\rangle$. Bestimmen Sie die beiden Konstanten c, c' .
- Berechnen Sie schließlich die Matrixelemente von x und p in der Energiedarstellung, also $x_{mn} = \langle m | x | n \rangle$ und $p_{mn} = \langle m | p | n \rangle$.

Aufgabe 2: Evolution des harmonischen Oszillators im Schrödinger-Bild

[5]

Der eindimensionale Oszillator aus Aufgabe 1 sei zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

in der Energiedarstellung gegeben. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Ergebnisse aus Aufgabe 1

$$\langle H \rangle, \langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle, (\Delta x)^2, (\Delta p)^2$$

zu beliebigen Zeiten $t > 0$ und überprüfen Sie schließlich die Unschärferelation.

Aufgabe 3: Zweidimensionaler Hamiltonoperator

[4]

Diagonalisieren Sie den zweidimensionalen Hamiltonoperator

$$H = \hbar\omega(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|).$$

Also bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte und Eigenkets in der $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ -Basis und geben Sie schließlich die Spektraldarstellung von H an.

(b.w.)

Aufgabe 4: Rechnen mit Vektoren im Hilbertraum**[3 · 1 + 2 · 2 = 7]**

Die Vektoren $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem (VONS) in einem zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Darin sind ebenfalls die Vektoren

$$|\varphi\rangle = (3 - i)|v_1\rangle + (1 + 2i)|v_2\rangle, \quad |\chi\rangle = (1 + i)|v_1\rangle + (1 - i)|v_2\rangle$$

gegeben.

- (a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \chi | \varphi \rangle$.
- (b) Bestimmen Sie die Komponenten von $|\varphi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich der orthonormierten Vektoren

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|v_2\rangle, \quad |u_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle.$$

- (c) Gegeben sei ein linearer Operator A auf dem gleichen Hilbertraum. Zeigen Sie am obigen Beispiel explizit, dass die Spur unabhängig von der gewählten Basis ist, also dass

$$\text{Sp } A = \sum_{i=1,2} \langle v_i | A | v_i \rangle = \sum_{i=1,2} \langle u_i | A | u_i \rangle.$$

- (d) Projektoren P_i auf Unterräume $\mathcal{H}_i$ haben die Eigenschaften $P_i^2 = P_i$ und $\sum_i P_i = 1$ (Vollständigkeit), falls die $\mathcal{H}_i$ den gesamten Raum $\mathcal{H}$ aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren $P_u = |u_1\rangle\langle u_1|$ und $P_v = |v_1\rangle\langle v_1|$. Bestimmen Sie die Komponenten von P_u bezüglich $|v_i\rangle$ und die von P_v bezüglich $|u_i\rangle$. Schreiben Sie schließlich P_u in der Basis $|v_i\rangle$.
- (e) Zeigen Sie die Eigenschaft der Spur eines Operators aus Teil (c) nun allgemein in einem Hilbertraum beliebiger Dimension.

$\Sigma_{\text{Blatt1}} = 20$