

Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 2

Abgabe: Fr, 10.11.'06, 9.45 Uhr, Erdgeschoss Physikhochhaus.

Aufgabe 5: Gaußsche Wellenpakete

[4]

Betrachten Sie das folgende Gaußsche Wellenpaket im Ortsraum

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{d} \sqrt[4]{\pi}} \exp \left[ikx - \frac{x^2}{2d^2} \right].$$

- (a) Berechnen Sie $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle, (\Delta x)^2, (\Delta p)^2$ in der Ortsdarstellung.
- (b) Bestimmen Sie die Impulsdarstellung $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$ des Gaußschen Wellenpaketes und berechnen Sie noch einmal $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$, diesmal in der Impulsdarstellung.
- (c) Wie lautet die Unschärferelation für diesen Zustand? Skizzieren Sie $|\psi|^2$ im Orts- und Impulsraum für verschiedene d . Was passiert in den Grenzfällen $d \rightarrow 0$ bzw. $d \rightarrow \infty$?

Aufgabe 6: Translationsoperator

[4]

Untersuchen Sie den Translationsoperator

$$\mathcal{T}(\vec{\ell}) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\ell} \right).$$

- (a) Zeigen Sie für beliebige Funktionen F und G , die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, aufgrund der fundamentalen Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls die beiden Relationen

$$[x_i, G(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial G(\vec{p})}{\partial p_i}, \quad [p_i, F(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

- (b) Bestimmen Sie damit den Kommutator $[x_i, \mathcal{T}(\vec{\ell})]$.
- (c) Wie ändert sich der Erwartungswert $\langle \vec{x} \rangle$ bezüglich eines Zustandes $|\psi\rangle$ mit einer Translation $|\psi'\rangle = \mathcal{T}(\vec{\ell})|\psi\rangle$?

(b.w.)

Aufgabe 7: Baker–Hausdorff Theorem**[5]**

Gegeben seien zwei Operatoren A, B mit den Eigenschaften $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$[e^{-B}, A] = [A, B]e^{-B}.$$

Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = e^{-xB} A e^{xB}$. Nach Differenzieren und Integrieren derselben bekommen Sie eine Identität, die Sie schließlich zur Behauptung führt.

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) das *Baker–Hausdorff–Theorem*

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

Hinweis: gehen Sie wieder vor wie in (a), diesmal jedoch mit einer Funktion $g(x) = e^{x(A+B)} e^{-xA} e^{-xB}$.

Aufgabe 8: Kohärente Zustände**[7]**

Ein kohärenter Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist als Eigenzustand des Vernichtungsoperators a definiert:

$$a |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle.$$

- (a) Konstruieren Sie einen normierten kohärenten Zustand $|\phi\rangle$ explizit in der Energiedarstellung indem Sie ihn aus dem Grundzustand $|0\rangle$ aufbauen. Der Eigenwert ϕ bleibt zunächst unbestimmt. Gelingt diese Konstruktion auch für $a^\dagger$?
- (b) Wie lautet die Unschärferelation in diesem Zustand?
- (c) $|\phi\rangle$ ist eine kohärente Überlagerung von Energieeigenzuständen $|n\rangle$. Zeigen Sie, dass die Besetzungszahl n POISSON-verteilt ist. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und für grosse μ auch den wahrscheinlichsten Wert der Besetzungszahl (und damit auch der Energie) des kohärenten Zustandes.
- (d) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator aus Aufgabe 6 aus dem Grundzustand einen kohärenten Zustand erzeugt. Welche Rolle spielt nun der Eigenwert ϕ ?

 $\Sigma_{\text{Blatt2}} = 20$